Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Elementos de grupos e álgebras de Lie na teoria quântica

Acadêmico: Gabriel Henrique Bandeira
Orientador: Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes

Maringá, 23 de janeiro de 2024

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Elementos de grupos e álgebras de Lie na teoria quântica

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física, da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmico: Gabriel Henrique Bandeira

Orientador: Renio do Santos Mendes

Maringá, 23 de janeiro de 2024

"O professor sempre se impacienta, quando tem de explicar qualquer coisa mais de uma vez; o livro não, o livro exige apenas a boa vontade de quem estuda."

(Aluísio de Azevedo)

Sumário

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao professor Renio dos Santos Mendes por me orientar e ajudar na confecção deste trabalho além de proporcionar conversas muito agradáveis e recheadas de boas analogias. Também, ao professor Alexandre José Santana que orientou minha iniciação científica me introduziu no assunto de álgebras de Lie. São duas pessoas fundamentais que julgo como referência.

Agradeço o meu amigo Gabriel (Marinowski) Marino, que aguentou todas minhas brincadeiras de mau gosto e ouviu meus desabafos sobre a vida. Ao ancião Jhonatan Berrar, Brenno Greatti e Dona Grazi que me ajudaram nos estudos e ser uma pessoa mais paciente. Ao Matheus Travain e Lucax que estiveram comigo desde o primeiro ano de graduação. À galera do bonde dos fracacalvos em especial ao meu anjo e monge Fri Bennert e às tulipas amarelas.

Por último mas não menos importante, aos meus pais que me deram a oportunidade de viver nessa realidade quase inóspita.

Abstract

In this work, we will establish a foundation of what comes to be a Lie group. Also, we will show how to derivate the tangent space associate to the Lie groups, that is, your respective Lie algebra. In the context of a semissimple Lie algebra, we build the quadratics invariants operators, also call Casimir operators. In a example we will use this operators to construct a base for the angular momentum. Under the use of the concepts of group symmetry, will be shown that the degeneracy of the eigenvalues of hydrogen atom came from the fact that the Coulomb potential has the $SO(4)$ group as symmetry group.

Key words: Lie theory, Quantum Mecanics and Symmetries.

Resumo

Neste trabalho, vamos estabelecer um alicerce do que vêm a ser os grupos de Lie. Também, iremos mostrar de forma simplista como encontrar o espaço tangente à esses grupos, ou seja, as álgebras de Lie associadas a um grupo de Lie. Dentro do contexto de uma álgebra de Lie semi-simples, construiremos os invariantes de Casimir mais simples, mas de muita relevância para sistemas físicos, os operadores de Casimir quadráticos. Também será dado um exemplo para a aplicação desses operadores na construção de uma base de autoestados dos operadores de momento angular. Será explorado o conceito de grupo de simetria dentro da mecânica quântica e mostraremos que a degenerescência do átomo de hidrogênio se deve ao fato de que o potencial coulombiano tem como grupo de simetria o grupo $SO(4)$.

Palavras-chave: Teoria de Lie, Mecânica Quântica e Simetrias.

Introdução

A teoria de grupo é uma importante ferramenta para o entendimento e desenvolvimento da física moderna, especialmente quando se diz respeito às simetrias contidas em um sistema físico [1, 2]. Matematicamente, este conceito emerge quando certas características de objetos são conservadas perante uma transformação, podendo ela ser, por exemplo, reflexão em relação a um plano ou reta, rotação e translação. Na física, de acordo com o teorema de Noether [3], as simetrias representam a conservação de algumas características como a energia, momento ou propriedades mais exóticas como o isospin, estranheza e hipercarga. Um dos ramos da teoria dos grupos refere-se aos grupos de Lie. Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável no qual as operações de multiplicação e inversão são mapas suaves, isto é, infinitamente diferenciáveis. Estes objetos têm origem nos trabalhos do matemático norueguês Sophus Lie quando o mesmo estudava equações diferenciais via seus grupos de simetria [4]. A partir dos resultados destes estudos de grupos, emergiu os grupos infinitesimais, contínuos – as álgebras de Lie – que estabelecem uma relação com os grupos por meio de um mapa exponencial. Neste contexto, a identificação dessa teoria na descrição de muitas teorias físicas é natural. Neste trabalho serão utilizados as obras [2, 5–7].

Neste trabalho, pretendemos estabelecer um alicerce do que vêm a ser os grupos de Lie. Também, tentaremos mostrar de forma simplificada como encontrar o espaço tangente à esses grupos, ou seja, as álgebras de Lie associadas a um grupo de Lie.

No que se refere às álgebras de Lie, introduziremos a teoria de representação dessas álgebras e uma breve explanação de como essa teoria se relaciona com as estruturas das álgebras de Lie. Ainda, será feita a construção da álgebra envelopante universal de uma álgebra de Lie, de onde vem os operadores de interesse para este trabalho.

Dentro do contexto de uma álgebra de Lie semi-simples, tentaremos construir os invariantes de Casimir mais simples, mas de muita relevância para sistemas físicos, os operadores de Casimir quadráticos.

Também será dado dois exemplos de como esses operadores ajudam a compreender a degenerescência dos autoestados do átomo de hidrogênio e como é importante quando queremos conhecer uma grandeza que se conserva em um sistema hamiltoniano.

Capítulo 1

Noções de grupo

Neste capítulo serão apresentado alguns aspectos à respeito da teoria de grupos. O objetivo aqui é entender propriedades de alguns objetos matemáticos e apontar características comuns a eles, de forma a criar-se uma base para o que vêm a ser um grupo de Lie.

1.1 O conceito de grupo e subgrupo

A idéia de grupos está intimamente relacionada com a nossa concepção de simetria. Esse ramo da matemática surge com Galois tentando encontrar as raízes de polinômios [8]. O matemático francês mostrou que cada equação polinomial tem um grupo finito de "simetrias" (permutação de suas raízes que deixam seus coeficientes invariantes), e que essa equação tem solução apenas se seu grupo de simetria se decompõe de uma certa maneira.

O conceito de simetria está intimamente ligado aos grupos. Primeiramente, por uma transformação simétrica, entende-se como uma tranformação que deixa alguma característica do sistema invariante, por exemplo, uma transformação de rotação. Esta transformação deixa invariante a forma do objeto no qual atua, mantendo seu volume original.

Pode-se intuir que a composição de duas transformações simétricas resulta numa terceira também simétrica. Ainda no exemplo das rotações, é fácil perceber que, na verdade, independente das rotações aplicadas à um corpo, o volume do mesmo sempre será o mesmo.

Por um grupo entende-se um conjunto de elementos distintos $\mathbf{G} = \{g_1,\ g_2,\ g_3,\ ...\}$ munidos de uma operação definida entre eles (*) satisfazendo as seguindes propriedades (axiomas de grupos):

i): O grupo é fechado sob a operação nele definida:

$\forall g_i, g_j \in \mathbf{G}$, $g_i * g_j = g_k \in \mathbf{G}$.

ii): A operação é associativa entre os elementos:

$\forall g_i, g_j, g_k \in \mathbf{G}, (g_i * g_j) * g_k = g_i * (g_j * g_k)$.

iii): Existe um elemento e do grupo que satisfaz

$e * g_i = g_i * e = g_i$.

para todo $g_i \in \mathbf{G}$.

iv): Para todo elemento g do grupo, existe somente um elemento g^{-1}, chamado elemento inverso, que satisfaz

$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Grupos contendo infinitos elementos são chamados de *grupos infinitos*, enquanto que os contendo um número finito de elementos são chamados de *grupos finitos.* O número total de elementos de um grupo finito é a *ordem do grupo.*

Pode-se notar que a operação entre os elementos de um grupo não necessariamente comuta, ou seja, $g_i * g_j = g_j * g_i$. Os grupos onde os elementos comutam entre si são chamados de *grupos abelianos.* Em contrapartida, os que não comutam são chamados de *grupos não abelianos.*

Se um grupo de Lie **G** possui um subgrupo abeliano **H**, então

$$g_\nu h_i g_\nu^{-1} = g_j; \tag{1.1}$$
$$h_i h_k = h_k h_i, \tag{1.2}$$

ocorre para todos h_i e para todo elemento g_ν do grupo **G**, ou seja $g_\nu h_i g_\nu^{-1}$ ainda é um elemento de subgrupo abeliano **H**, este último é chamado de *subgrupo invariante abeliano.* Se **H** é invariante mas não abeliano, ou seja, só é válida a primeira igualdade, então é chamado de *subgrupo invariante.*

Para estudar um grupo **G** olha-se para os grupos que estão contidos neste, isto é, os subgrupos **H** de **G**. Assim, **H** é um subgrupo de **G** se satisfaz todos os axiomas de grupo e está contido em **G**.

Outra classe de grupos que será vista ao longo de todo o texto são os *Grupo Compactos.* Estes grupos são grupos topológicos cuja topologia é compacta. Um grupo é um grupo topológico quando munido de uma topologia, de modo que a multiplicação

$$G \times G \to G(x, y) \to xy, \tag{1.3}$$

e a inversão

$$G \to Gx \to x^{-1}, \tag{1.4}$$

são funções contínuas.

A grosso modo, diz-se que um grupo é compacto quando este é limitado. Mais detalhes sobre tais grupos são encontrados nas referências [9, 10].

Operações entre grupos se assemelham com as operações de conjuntos. No apêndice A deste trabalho são encontrados conceitos que permeiam a teoria.

1.2 Exemplos de grupos e subgrupos

Para ilustrar os conceitos apresentados até agora, vamos apresentar um série de exemplos e assim verificar como diferentes estruturas podem se relacionar através do conceito de grupo.

Exemplo 1.2.1. *O conjunto dos inteiros positivos e negativos, $\mathbb{Z}$, munidos com a operação de adição, formam um grupo infinito pois:*

i) A soma de dois inteiros quaisquer resulta em um inteiro;

ii) A operação de soma é associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

iii) $e \equiv 0 \in \mathbb{Z}$ pois $a + 0 = 0 + a = a$;

iv) $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\exists a^{-1} \equiv -a$; $a + (-a) = 0$.

Ainda, podemos ver que esse grupo é abeliano devido a comutatividade da operação soma.

Exemplo 1.2.2. *O conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ invertíveis, $GL_n(\mathbb{K})$, com a operação de multiplicação usual de matrizes, forma um grupo:*

i) A multiplicação de duas matrizes quadradas resulta em uma matriz quadrada;

ii) A associatividade é garantida pelo produto usual das matrizes, uma vez que

$$A(BC) = (AB)C,$$

para quaisquer A, B e C;

iii) O elemento neutro do grupo é a matriz identidade, $\mathbb{1}$, a matriz cuja diagonal principal admite valores iguais a 1 e zero nas demais entradas. Daí, é claro que $det(\mathbb{1}) \neq 0$ e

$$\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A,$$

para qualquer matriz A;

iv) O elemento inverso é a matriz inversa de cada matriz, que existe por suposição. O grupo geral linear é de extrema importância pois as representações de grupos de matrizes são diretas. Ainda, todas transformações lineares podem ser representadas por matrizes.

Exemplo 1.2.3. *Define-se o grupo ortogonal sobre $\mathbb{K}$ como:*

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{K}) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \ ; \langle AX,\ AY\rangle = \langle X,\ Y\rangle \ \text{para todo}\ X, Y \in \mathbb{K}^n\}$$

em que $\langle X, Y\rangle$ representa o produto interno padrão entre dois vetores.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o grupo recebe o nome de grupo ortogonal e é denotado por $O(n)$. No entanto, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o grupo recebe o nome de grupo unitário e é denotado por $U(n)$. Ainda, se $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, tem-se o grupo simplético, denotado por $Sp(n)$.

Equivalentemente, uma matriz cujas entradas são reais, complexos ou quaténios, é ortogonal se

$$AA^\dagger = \mathbb{1}.$$

Aqui, $A^\dagger$ é a matriz transposta conjugada de A e também sua inversa. É facil ver que esse conjunto de matrizes satisfaz os axiomas de grupo cuja operação é a multiplicação usual.

Se as matrizes que compõe o grupo ortogonal satisfazem a condição extra do seu determinante ser unitário, obtém-se outros importantes grupos:

$$SO(n) := \{A \in O(n); det(A) = 1\}.$$

chamado especial ortogonal, *e também o* grupo unitário especial,

$$SU(n) := \{A \in U(n); det(A) = 1\}.$$

Vale observar que o determinante de uma matriz ortogonal pode assumir dois valores, ± 1. Mostraremos isso relembrando as propriedades do determinante:

$$det(AA^t) = det(A)det(A^t) \ \text{e}\ det(A^t) = det(A).$$

Com isso, temos

$$1 = det(\mathbb{1}) = det(AA^t) = det(A)^2.$$

O conjunto das matrizes cujo determinante é -1 não se faz interessante pois sequer forma um grupo, já que duas matrizes com esse determinante resulta em uma matriz com o determinante $+1$.

Ambos são subgrupos do grupo especial linear $SL_n(\mathbb{K})$:

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in GL)_n(\mathbb{K}); det(A) = 1\}.$$

A forma explícita de um elemento de $SO(2)$ e $SU(2)$, respectivamente, é

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix}; \tag{1.5}$$

em que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Esses dois subgrupos são importantes pois seus elementos representam rotações no espaço pois, por definição, uma rotação é uma aplicação linear que preserva o comprimento e a orientação dos objetos em que atua[1].

Exemplo 1.2.4. *As transformações de Lorentz da relatividade restrita formam um grupo, o* grupo de Lorentz.

Para mostrar isso, vamos supor um Boost *na direção x', que se move com velocidade v, é [11, p.24]*

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx/c^2), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ com $\beta = v/c$ é o fator de Lorentz e c é a velocidade da luz.

Utilizando a representação matricial, teremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma \frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \equiv L(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Agora seja $L_1(v_1)$ e $L_2(v_2)$, o produto destas é dado por

$$\begin{aligned} L_2L_1 &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 c \\ \frac{\gamma_2 v_2}{c^2} & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 c \\ -\frac{\gamma_1\beta_1}{c^2} & \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & -\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 c \\ -\gamma_1\gamma_2\frac{\beta_2}{c} - \gamma_1\gamma_2\frac{\beta_1}{c}\beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 \end{pmatrix} \\ &= [\gamma_1\gamma_2(1+\beta_2\beta_1)] \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta_2+\beta_1 c}{1+\beta_2\beta_1} \\ -\frac{(\beta_2+\beta_1)/c}{1+\beta_2\beta_1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pela adição de velocidades relativísticas,

$$v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}.$$

Com isso podemos mostrar que

[1]Uma rotação de um vetor no espaço tridimensional pode ser escrita por uma conjugação de quatérnios unitários $x \mapsto qxq^{-1}$, com $q \in \mathbb{H}e|q| = 1$. Este último é representado por uma matriz do grupo $SU(2)$.

$$[\gamma_1\gamma_2(1+\beta_2\beta_1)] = \frac{1}{\sqrt{1-(v_3/c)^2}} = \gamma_3.$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\beta_1/c+\beta_2/c}{1+\beta_1\beta_2} = \frac{(v_2+v_1)/c^2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} = \frac{v_3}{c^2}.$$

Por fim, temos:

$$L_1L_2 = \gamma_3\begin{pmatrix} 1 & -v_3 \\ -\frac{v_3}{c^2} & 1 \end{pmatrix} = L_3,$$

comprovando o primeiro axioma de grupo. A regra de multiplicação nos permite mostrar que as outras três, pois a associatividade é herdada da multiplicação de matrizes, o elemento neutro é a própria matriz identidade quando $v = 0$, a inversa é dada por

$$L^{-1}(v) = L(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma\frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix},$$

pois

$$\begin{aligned} L(v)L(-v) &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma\frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma\frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2} & \gamma^2 v - \gamma^2 v \\ \gamma^2\frac{v}{c^2} - \gamma^2\frac{v}{c^2} & \gamma^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.3 Representações de grupos

As representações de grupos abstratos são citadas sutilmente durante um curso de álgebra linear e em mecânica quântica linear em que se representa as transformações lineares e os operadores lineares por matrizes. Assim, a teoria de representação busca, portanto, representar a atuação e um grupo abstrato qualquer em um espaço vetorial.

Assim, se para cada elemento g de um grupo G se associa um operador, que denotaremos por $D(g)$, em que a estrutura desse grupo é preservada, então dizemos que tal conjunto de operadores é uma representação do grupo abstrato no espaço de representação V. Esse espaço vetorial é o espaço onde cada operador $D(g)$ irá atuar.

Definição 1.3.1. *Uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V é um grupo de identidades homomórficas ao grupo abstrato original onde cada um de seus elementos devem satisfazer as seguintes propriedades:*
i) $D(gg') = D(g)D(g'), \forall g, g' \in G$;
ii) $D(g^-1) = [D(g)]^{-1}\forall g \in G$;
iii) $D(e) = \mathbb{1}$, e o elemento neutro do grupo.

Definição 1.3.2. *A dimensão da representação é a dimensão do espaço das representações.*

Quando os operadores são lineares, ou seja,

$$D(|v\rangle + |v'\rangle) = D(|v\rangle) + D(|v'\rangle); \tag{1.10}$$
$$D(a\,|v\rangle) = aD(|v\rangle), \tag{1.11}$$

com $|v\rangle$, $|v'\rangle \in V$ e a um número complexo, eles formam uma representação linear de G.

Essa definição nos permite tirar duas conlusões. A primeira é que cada grupo tem uma representação unidimensional que é a representação trivial que associa qualquer elemento do grupo ao operador identidade que atua em V. A segunda é que o determinante de cada matriz representação também é uma representação, pois:

$$det[D(g)]det[(D(g')] = det[D(g)D(g')] = det[D(gg')]. \tag{1.12}$$

Nota-se que podemos associar o mesmo operador a dois ou mais elementos de G mas não podemos fazer o contrário. No caso no qual existe uma correspondência um para um entre os elementos do grupo e os operadores, a representação é dita *fiel*. Mais precisamente, uma representação é fiel quando existe um isomorfismo entre o grupo e o conjunto de operadores.

Como se vê em mecânica quântica [12, p. 20], dada uma base ortonormal $\{|v_i\rangle\}(i = 1, 2, 3, ...)$ do espaço vetorial V, podemos construir a representação matricial de um operador D de uma dada representação. A ação de um operador D em um elemento da base $|v_i\rangle$ produz um elemento do espaço que pode ser escrito como combinação linear da base

$$D(|V_i\rangle) = D_{ij}\,|v_j\rangle\,. \tag{1.13}$$

Aqui fora usado a convenção de soma de Einstein. Os coeficientes D_{ij} constituem a matriz representativa do operador D. De fato, temos

$$D'(D\,|v_i\rangle) = D_{ij}D'(|v_j\rangle) = D'_{kj}D_{ji}\,|v_k\rangle = (D'D)_{ki}\,|v_k\rangle\,. \tag{1.14}$$

Notemos que as matrizes em cada representação não podem ser singulares devido à existência do elemento inverso. Ainda, o elemento neutro do grupo é sempre representado pela matriz identidade, ou seja, $D_{ij}(e) = \delta_{ij}$.

Exemplo 1.3.1. *Como exemplo de uma representação não linear, considere a transformação no plano complexo z como*

$$z \to z' = \frac{a_1 z + a_2}{a_3 + a_4};\;\; z, a_i \in \mathbb{C};\;\; a_1a_4 - a_2a_3 \neq 0. \tag{1.15}$$

Agora, consideremos a segunda transformação composta com a primeira ($b_i \in \mathbb{C}$)

$$z' \to z'' = \frac{b_1 z' + b_2}{b_3 + b_4} = \frac{(b_1a_1 + b_2a_3)z + (b_1a_2 + b_2a_4)}{(b_3a_1 + b_4a_3)z + (b_3a_2 + b_4a_4)}. \tag{1.16}$$

Note que tais transformações compõem na mesma forma que o produto das matrizes complexas 2×2, ou seja,

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 + b_2a_3 & b_1a_2 + b_2a_4 \\ b_3a_1 + b_4a_3 & b_3a_2 + b_4a_4 \end{pmatrix}.$$

Desde que os determinantes das matrizes não sejam nulos, a transformação (1.15) constituem um grupo isomórfico ao $GL(2,\mathbb{C})$. Impondo os vínculos

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |a_3|^2 + |a_4|^2 = 1, \tag{1.17}$$

e

$$(a_1 a_3^* + a_2 a_4^*) = 0, \tag{1.18}$$

tem-se o grupo isomorfo à $SU(2)$. As transformações (1.15) são chamadas de transformações de Möbius *no plano complexo.*

Podemos representar de diferentes formas o mesmo grupo G, e, por isso, podemos ter a seguinte definição:

Definição 1.3.3. *Duas representações $D(G)$ e $D'(G)$ são ditas representações equivalentes se, para todo elemento $g \in G$ existe uma transformação de similaridade S, tal que:*

$$D'(g) = SD(g)S^{-1}, \tag{1.19}$$

sendo S a mesma para todo g.

Duas representações equivalentes têm, necessariamente, a mesma dimensão. Se o espaço vetorial sobre o qual os operadores atuam é o mesmo, então a transformação de similaridade representa uma mudança de base.

Do que fora dito até aqui, as representações de um grupo atuam como transformações em elementos do espaço vetorial V, o espaço das representações. Assim, podemos estruturá-las de acordo como agem nesse espaço. No caso em que deixa um subespaço V_1 de V invariante, dizemos que a representação é uma *representação redutível.* Por espaço invariante, queremos dizer que

$$D(g)\,|v_1\rangle \in V_1, \tag{1.20}$$

para qualquer $|v_1\rangle \in V_1$ e $g \in G$. Se a condição da definição 1.3.1 é válida para qualquer elemento de V, segue que V_1 constitui um espaço de representação de G.

Definição 1.3.4. *Uma reprsentação matricial é dita redutível se, por transformações de similidade, conseguimos escrevê-la na forma*

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(i)}(g) & A(g) \\ 0 & D^{(k)} \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

onde $D^{(i)}(g)$ (i = 1,2, ... ,k) são também representações do mesmo grupo.
a) Ela é dita completamente redutível se $A(g) = 0$;
b) Quando ela não pode ser escrita nessa forma, ela é dita irredutível;
c) Uma representação totalmente redutível é a soma direta de representações irredutíveis, isto é:

$$D = \bigoplus_{\nu} a_\nu D^{(\nu)}, \tag{1.22}$$

em que a_ν são inteiros positivos e a dimensão de D é a soma das dimensões de $D^{(\nu)}$.

Podemos abstrair esses resultados lembrando da álgebra linear quando diagonalizamos uma transformação. O espaço invariante em questão são os subespaços vetoriais gerados pelos autovetores associados a um autovalor.

Se tratando de matrizes diagonais, um importante resultado a respeito das representações matriciais é o seguinte lema:

O lema de Schur diz respeito ao conjunto de operadores comutantes com um subconjunto de transformações lineares, ou seja, o centralizador destes. Discutiremos esse lema se baseando fortemente no livro texto [13].

Seja $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$ tal que $[A, B] = 0$. Se $Av = 0$, então Ker A é um subespaço invariante por B pois, como $[A, B] = AB - BA = 0$, então $A(Bv) = B(A) = B(0) = 0$ $\forall v \in Ker\{A\}$. Da mesma forma, se $w = Av$, então $Bw = B(Av) = A(Bv)$, logo $\mathrm{Im}(A)$ é B-invariante.

Agora vamos tomar um subconjunto de operadores lineares que age em V: $\Gamma \subset \mathfrak{gl}(V)$ e supomos que ele seja irredutível, no sentido em que os únicos subespaços invariantes por todos os elementos de Γ são os triviais $\{0\}$ e V. Agora, seja $L \in \mathfrak{gl}(V)$ uma transformação linear que comuta com todos os elementos de Γ. Então $\mathrm{Ker}(L)$ e $\mathrm{Im}(L)$ são invariantes por qualquer elemento de Γ. Como L é irredutível, segue que as possibilidades para o núcleo de L e $\mathrm{Im}(L)$ são $\{0\}$ e V. Isso significa que $L = 0$ ou é bijetora.

Supondo que L tenha um autovalor λ no corpo dos escalares de V, então $L - \mathbb{1}\lambda$ também comuta com todos os elementos de Γ. Isso significa, no caso irredutível, que $L - \mathbb{1}\lambda$ é a aplicação nula ou é uma aplicação bijetora. No entanto, $L - \mathbb{1}\lambda$ não pode ser bijetora pois não possui só o vetor nulo compondo o núcleo, uma vez que os autovetores associados à λ também estão presentes. Isso implica que $l = \mathbb{1}\lambda$. Esse é o resultado do Lema de Schur:

Proposição 1.3.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\Gamma \subset \mathfrak{gl}(V)$ um conjunto irredutível de transformações lineares de V. Seja $L \in \mathfrak{gl}(V)$ que comuta com todos os elementos de Γ. Suponha que L tem um autovetor em V associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, $L = \lambda\mathbb{1}$. Em particular, se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado* [2] *e dim $< \infty$, então o centralizador $\mathfrak{z}(\Gamma)$ de Γ em $\mathfrak{gl}(V)$ é o subespaço das transformações escalares (multiplos da identidade).*

Corolário 1.3.1. *Toda representação irredutível de um grupo abeliano é unidimensional.*

Prova: *Como o grupo é abeliano, qualquer matriz tem de comutar com qualquer outra matriz da representação. De acordo com o lema de Schur, elas devem ser proporcionais à matriz identidade. Daí, qualquer vetor do espaço das representações gera um espaço invariante. Portanto, V tem que ser unidimensional se a representação for irredutível.*

Para calcular os autovalores dos autovetores, precisa-se resolver equações algébricas. Portanto, o lema de Schur deve ser considerado em representações onde o respectivo espaço de representação está sobre um campo algebricamente fechado.

Definição 1.3.5. *Uma representação D é dita ser unitária se as matrizes D_{ij} dos operadores são unitárias, ou seja, $D^\dagger = D^{-1}$.*

Um importante resultado na teoria das representações de grupos finitos e compactos é o seguinte teorema:

[2] Um corpo é dito algebricamente fechado se os polinômios característicos possui raízes dentro deles.

Teorema 1.3.1. *Qualquer representação de um grupo finito é equivalente a uma representação unitária.*

Prova: *Seja G um grupo finito de ordem N, e D uma representação de G de dimensão d. Introduzimos a matriz hermitiana H ($H^\dagger = H$) dada por*

$$H \equiv \frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^\dagger(g)D(g). \tag{1.23}$$

Para qualquer $g' \in G$

$$D^\dagger(g')HD(g') = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^\dagger(gg')D(gg') = H. \tag{1.24}$$

Como H é hermitiana, pode ser diagonalizada por uma transformação de similaridade, ou seja, $H' \equiv U^\dagger HU$. Para qualquer vetor coluna não nulo v (com entradas complexas), a quantidade

$$v^\dagger Hv = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} |D(g)v|^2, \tag{1.25}$$

é real e positivo. Mas, introduzindo $v' \equiv U^\dagger v$

$$v^\dagger Hv = v'^\dagger H'v' = \sum_{i=1}^{d} H'_{ii}|v'_i|^2, \tag{1.26}$$

em que v'_i são as componentes de v'. Como v'_i são arbitrárias, concluímos que cada entrada H'_{ii} de H' é real e positiva. Portanto definimos a matriz diagonal de entradas reais h com entradas $h_{ii} = \sqrt{Hii'}$, ou seja, $H' = hh$. Portanto,

$$H = UH'U^\dagger = UhhU^\dagger \equiv SS, \tag{1.27}$$

em que definimos $S \equiv UhU^\dagger$. Note que S é hermitiana, uma vez que h é real e diagonal.

Definindo a representação de G dada pelas matrizes

$$D'(g) \equiv SD(g)S^{-1}, \tag{1.28}$$

temos

$$(S^{-1}D'(g)S)^\dagger(SS)(S^{-1}D'(g)S) = SS, \tag{1.29}$$

Daí

$$D'^\dagger(g)D'(g) = \mathbb{1}. \tag{1.30}$$

Por conseguinte, a representação $D(g)$ é equivalente à representação unitária $D'(g)$.

Exemplo 1.3.2. *O grupo de rotações no plano, denotado por $SO(2)$, pode ser representado pelas matrizes*

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

tal que

$$R(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta\\-x\operatorname{sen}\theta+y\cos(\theta)\end{pmatrix},\tag{1.32}$$

Pode-se facilmente mostrar que $R(\theta)R(\phi)=R(\theta+\phi)$. Esse grupo é abeliano e, de acordo com o corolário 1.3.1, sua representação é redutível se o espaço vetorial da representação é definido sobre o corpo dos complexos. De fato, tem-se

$$MR(\theta)M^{-1}=\begin{pmatrix}e^{-i\theta}&0\\0&e^{i\theta}\end{pmatrix},\tag{1.33}$$

em que

$$M=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}.\tag{1.34}$$

Os vetores do espaço da representação são transformados como

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+iy\\ix+y\end{pmatrix}.\tag{1.35}$$

Capítulo 2

Grupos de Lie e álgebras de Lie

Os grupos de Lie e os grupos algébricos lineares são os principais ramos da teoria de grupos. Neste capítulo será apresentado os grupos de Lie junto de suas propriedades geométricas e algébricas. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G é definida como o espaço dos campos invariantes (à direita ou à esquerda), com o colchete dado pelo colchete de Lie de campos de vetores. A conexão entre um grupo de Lie e sua álgebra é feita por meio do mapa exponencial $exp : \mathfrak{g} \to G$. Aqui, não irei utilizar as construções de campos invariantes, mas sim uma abordagem informal e introdutório do tema. Por fim, serão apresentados exemplos de grupos e suas respectivas álgebras.

2.1 Grupos de Lie

De um ponto de vista mais geométrico, podemos visualizar os elementos de um grupo como sendo pontos em um espaço. Por exemplo, podemos visualizar os elementos do grupo $SO(2)$ como sendo um ponto no círculo unitário centrado na origem, já que um ponto nessa circunferência assinala um ângulo em relação à um dos eixos e com isso definir a matriz de rotação. Ainda, já fora explanado que grupos contendo um número finito ou infinito de parâmetros são chamados de grupos finitos e infinitos, respectivamente. Grupos cujos elementos são caracterizados por um número contínuo de parâmetros são chamados de grupos contínuos e são nestes que aparecem interessantes propriedades geométricas no seu espaço associado. Tomando novamente o grupo das rotações no plano como exemplo, vê-se que seus elementos podem ser vistos como um parâmetro que pode variar continuamente no intervalo $[0, 2\pi]$. Neste sentido, podemos dizer que o grupo das rotações no plano são grupos compactos. Pode-se encontra mais considerações geométricas em [14] [15].

Definição 2.1.1. *Um grupo de Lie é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto*

$$p : (g, h) \in G \times G \longmapsto gh \in G, \tag{2.1}$$

é analítica.

Os elementos de um grupo de Lie dependem analiticamente de n parâmetros e possivelmente de uma coordenada r, isto é, são da forma $\hat{U}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; r)$. É vantajoso escolher os parâmetros tal que $\hat{U}(0) = \mathbb{1}$. Podemos representar o operador do grupo como

$$\hat{U}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; r) = \exp\left\{-i\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu \hat{L}_\mu\right\}, \tag{2.2}$$

onde os operadores $\hat{L}_\mu$ são os chamados *geradores do grupo*. Podemos escrevê-los como

$$-i\hat{L}_\mu = \frac{\partial \hat{U}(\alpha_i)}{\partial \alpha_\mu}\Big|_{\alpha=0}. \tag{2.3}$$

Ainda, pode-se obter um elemento do grupo de Lie por transformações infinitesimais na vizinhança da identidade do grupo:

$$\hat{U}(\delta\alpha_\mu) = \hat{U}(0) + \frac{\partial \hat{U}(\alpha_i)}{\partial \alpha_\mu}\Big|_{\alpha=0}\partial\alpha_\mu = \mathbb{1} - i\hat{L}_\mu\delta\alpha_\mu = \mathbb{1} + d\hat{A}, \tag{2.4}$$

em que $d\hat{A} = -i\hat{L}_\mu\delta\alpha_\mu$.

Pode-se colocar $d\hat{A} = \hat{A}/N$ e daí $d\hat{A} = -i\hat{L}_\mu\alpha_\mu/N$, com N inteiro. Performando N transformações infinitesimais sucessivas, obtém-se uma transformação finita $\hat{U}(\alpha_\mu)$,

$$\hat{U}(\alpha_\mu) = \lim_{N\to\infty}[\mathbb{1} + \hat{A}/N]^N = e^{\hat{A}} = \exp\left\{-i\hat{L}_\mu\alpha_\mu\right\}. \tag{2.5}$$

Além disso, a partir da analiticidade de $\hat{U}(\delta\alpha_\mu)$ segue que

$$\hat{U}(\delta\alpha_\mu) = \mathbb{1} - i\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu\hat{L}_\mu - \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\alpha_\mu\alpha_\nu\hat{L}_\mu\hat{L}_\nu + \cdots. \tag{2.6}$$

Pode-se ver que os L_i's devem ser linearmente independentes ($\sum_i \delta\alpha_i\hat{L}_i = 0$ apenas se todos $\delta\alpha_i = 0$), pois se $\{\delta\alpha_i\} = 0$ deve ser igual à identidade de maneira única. O elemento inverso de um elemento do grupo, calculado até a segunda ordem em α_μ e de acordo com a equação (2.6), é dado por

$$\hat{U}(\delta\alpha_\mu) = \mathbb{1} + i\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu\hat{L}_\mu - \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\alpha_\mu\alpha_\nu\hat{L}_\mu\hat{L}_\nu + \cdots. \tag{2.7}$$

Explorando a convensão de soma de Einstein, calcula-se o produto

$$\begin{aligned}
&\hat{U}^{-1}(\delta\beta_\mu)\hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu)\hat{U}(\delta\beta_\mu)\hat{U}(\delta\alpha_\mu)\\
&\qquad= (\mathbb{1} + i\delta\beta_i\hat{L}_i - \frac{1}{2}\delta\beta_i\delta\hat{L}_i\hat{L}_j)(\mathbb{1} + i\delta\alpha_k\hat{L}_k - \frac{1}{2}\delta\alpha_k\delta\alpha_l\hat{L}_k\hat{L}_l)\\
&\qquad\times (\mathbb{1}ii\delta\beta_m\hat{L}_m - \frac{1}{2}\delta\beta_m\delta\beta_n\hat{L}_m\hat{L}_n)(\mathbb{1} - i\delta\alpha_\mu\hat{L}_\mu - \frac{1}{2}\delta\alpha_\mu\delta\alpha_\nu\hat{L}_\mu\hat{L}_\nu)\\
&\qquad= \mathbb{1} + \delta\alpha_k\delta\beta_m(\hat{L}_k\hat{L}_m - \hat{L}_m\hat{L}_k).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Como todos os quatro elementos são do grupo, o produto destes também o é.

Se fizermos $\delta\alpha_k\delta\beta_m(\hat{L}_k\hat{L}_m - \hat{L}_m\hat{L}_k) = -i\delta\gamma_j\hat{L}_j$, onde $-i\delta\gamma_j = c^j_{km}$, obtemos

$$[\hat{L}_k, \hat{L}_m] = c^j_{km}\hat{L}_j. \tag{2.9}$$

Dessa forma, os geradores com essa operação de comutação formam uma álgebra fechada sobre o comutador.

Exemplo 2.1.1. *Qualquer espaço vetorial de dimensão finita V sobre $\mathbb{R}$ é um grupo de Lie abeliano, com a operação $+$ em V. Em particular, $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo de Lie. Os grupos multiplicativos $\mathbb{R}_\times = \mathbb{R} - \{0\}$ e $\mathbb{C}_\times = \mathbb{C} - \{0\}$ também são grupos de Lie.*

Exemplo 2.1.2. *Os grupo das rotações no plano, $SO(2)$, é um grupo de Lie. Mais ainda, o grupo ortogonal, que contempla o grupo das rotações em $\mathbb{R}^n$, denotado por $SO(n)$, são grupos de Lie.*

Exemplo 2.1.3. *O grupo $GL(n)$ e $SL(n)$ discutidos na seção 1.2 são grupos de Lie.*

Exemplo 2.1.4. *Vimos no Exemplo 1.2.3 a forma explícita de um elemento do grupo $U(2)$. Vamos, agora, olhar com mais detalhes para este grupo, pois será recitado outras vezes no decorrer deste trabalho. Consideremos uma matriz 2×2 complexa U, e sua inversa*

$$U = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix}; \; U^{-1} = \frac{1}{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3} \begin{pmatrix} Z_4 & -Z_2 \\ -Z_3 & Z_1 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

em que

$$Z_4 = Z_1^*; \;\; Z_3 = -Z_2^*; \;\; |Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1. \tag{2.11}$$

Pode-se notar pelas equações acima que um elemento do grupo $SU(2)$ corresponde a um ponto na esfera. Assim, o conjunto dos elementos do grupo $SU(2)$. Podemos tomar como os três parâmetros do grupo os ângulos, ou seja,

$$Z_1 = \cos\theta e^{i\phi_1}; \;\; Z_2 = \sin\theta e^{i\phi_2}; \tag{2.12}$$

com $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi_a \leq 2\pi$, com $a = 1, 2.$, Portanto os elementos de U podem ser escritos como

$$\begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\phi_1} & \sin\theta e^{i\phi_2} \\ -\sin\theta e^{-i\phi_2} & \cos\theta e^{-i\phi_1} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Pode-se ver facilmente as características de um grupo de Lie, uma vez que os parâmetros são contínuos e os elementos são funções diferenciáveis, admitindo uma estrutura de variedade diferenciável.

2.2 Álgebras de Lie

Os elementos da álgebra de Lie de um grupo de Lie são equações diferenciais ordinárias no grupo que satisfazem uma propriedade de simetria proveniente da estrutura multiplicativa do grupo. As soluções dessas equações são os elementos dessa álgebra. A esse espaço tangente ao grupo gerado pelos vetores é reconhecido como a álgebra de Lie do grupo de Lie.

Pode-se, conjuntamente, considerar a álgebra de Lie como um objeto linear que aproxima o grupo: um elemento da álgebra de Lie é dado pela derivada de uma curva no grupo [13, p. 14].

As álgebras de Lie de um grupo de Lie são, tradicionalmente, denotadas pelas letras latinas escritas na fonte Fraktur. Assim, as álgebras de Lie associadas ao seu grupo de Lie são denotadas pelas mesmas letras, porém em letras minúsculas e nessa fonte.

2.2.1 Definições e exemplos

Definição 2.2.1. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de um produto (colchete)* $[.\ ,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *que satisfaz as propriedades:*

i) O colchete de Lie é bilinear, ou seja,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \tag{2.14}$$

e

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y] \tag{2.15}$$

para quaisquer números reais a, b *e quaisquer* X, Y *e* $Z \in \mathfrak{g}$.

ii) O colchete de Lie é anti-simétrico, ou seja, $[X, X] = 0$ *para qualquer* $X \in \mathfrak{g}$.

iii) A identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{2.16}$$

é satisfeita para quaisquer X, Y *e* $Z \in \mathfrak{g}$.

Vale ressaltar o que vem a ser o colchete de Lie citado acima. Definimos o colchete de duas matrizes quadradas A e B como o produto

$$[A, B] := AB - BA. \tag{2.17}$$

Observa-se que se A e B comutam, então $[A, B] = 0$. Assim, o colchete pode ser interpretado como uma maneira de medir a comutatividade do produto de matrizes.

Na mecânica quântica o colchete entra para substituir o parênteses de Poisson [16]. Ainda, quando dois operadores são compatíveis, teremos que $[X, Y] = 0$. Será mais detalhado no capítulo 3.

O colchete de Lie, em geral, não é associativo: como $[X, X] = 0$, temos que $[[X, X], Y] = 0$ mas $[X[X, Y]]$ nem sempre se anula. Por exemplo, no espaço das matrizes quadradas 2×2, se tomarmos

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

conclui-se facilmente que $[[X, X], Y] = 0$ mas $[X[X, Y]]$ é não nulo.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de álgebra de Lie.

Exemplo 2.2.1. *O espaço vetorial das matrizes quadradas reais* $M_n(\mathbb{R})$ *é uma álgebra de Lie com o colchete definido pela equação (2.17). Averiguando explicitamente, tomando* A, B, C *matrizes quadradas e números* a *e* b*, temos que*

i) O colchete é bilinear, ou seja,

$$\begin{aligned} [aA + bB, C] &= (aA + bB)C - C(aA + bB) \\ &= a(AC - CA) + b(BC - CB) \\ &= a[A, C] + b[B, C]; \end{aligned} \tag{2.19}$$

ii) Para toda matriz A *vale a igualdade* $[A, A] = 0$.

iii) A identidade de Jacobi é satisfeita também utilizando a produto usual de matrizes.

Exemplo 2.2.2. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e denotamos por* $gl(\mathfrak{g}) = \{\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *tal que* ϕ *é uma transformação linear*$\}$. *Sabemos que* $gl(\mathfrak{g})$ *é um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por número real definidas por*

$$(\phi_1 + \phi_2)(X) = \phi_1(X) + \phi_2(X), \tag{2.20}$$

e

$$a\phi(X) = a(\phi(X)), X \in \mathfrak{g}, a \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Tomando $\phi_1, \phi_2 \in gl(\mathfrak{g})$ *definimos o colchete*

$$[\phi_1, \phi_2] = \phi_1 \circ \phi_2 - \phi_2 \circ \phi_1. \tag{2.22}$$

Não é complicado ver que $gl(\mathfrak{g})$ *com o colchete definido acima é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 2.2.3. *Consideremos o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *e para* $u, v \in \mathbb{R}^3$ *definamos o colchete* $[u, v]$ *como o produto vetorial de* $\mathbb{R}^3$. *Segue imediatamente das propriedades do produto vetorial que* $\mathbb{R}^3$, *com este colchete, é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 2.2.4. *Seja* $\mathfrak{b}$ *um espaço vetorial qualquer e definamos*

$$[X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{b}. \tag{2.23}$$

É imediato verificar que $\mathfrak{b}$, munido deste colchete de Lie, é uma álgebra de Lie. As álgebras de Lie com colchete definido dessa forma recebem o nome de álgebras de Lie **abelianas**.

A estrutura de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pode ser representada em qualquer base pelas *constantes de estrutura* c_{jk}^l na base $\{e_j\}Z_{j=1}^{dim\mathfrak{g}}$

$$[e_j, e_k] = \sum_{l=1}^{dim\mathfrak{g}} c_{jk}^l e_l. \tag{2.24}$$

Definição 2.2.2. *Um subespaço vetorial* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *de uma álgebra de Lie se for fechado pelo colchete. Nesse caso,* $\mathfrak{h}$ *é também uma álgebra de Lie.*

Segue alguns exemplos de subálgebras de Lie:

Exemplo 2.2.5. *Seja* $\mathfrak{g}$ *subespaço vetorial das matrizes quadradas. O subepapaço das matrizes diagonais forma uma álgebra abeliana. De fato, considerando o colchete* $[A, B] = AB - BA$ *e tomando*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b_n \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

elementos genéricos de $\mathfrak{g}$, *temos que*

$$[A,B] = \begin{pmatrix} a_1b_1 - b_1a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 - b_2a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_nb_n - b_na_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}, \quad (2.26)$$

e, portanto, $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra abeliana da álgebra de Lie $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.6. *O conjunto das matrizes quadradas de traço zero que será denotado por*

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}, \quad (2.27)$$

é uma subálgebra das matrizes $M_n(\mathbb{R})$. De fato,

$$tr([A,B]) = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0 \quad (2.28)$$

e, portanto, $[A,B] \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.7. *Consideremos o subespaços de $M_n(\mathbb{R})$ definidos por*

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}, \quad (2.29)$$

chamado de subespaço das matrizes anti-simétricas. Temos que $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ é uma subálgebra de $M_n(\mathbb{R})$, pois se $A, B \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} [A,B]^t &= (AB - BA)^t = B^tA^t - A^tB^t, \\ &= (-B)(-A) - (-A)(-B) = -[A,B], \end{aligned} \quad (2.30)$$

e, portanto, $[A,B] \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$.

Uma classe importante de subálgebra são os ideais:

Definição 2.2.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{b}$ um subespaço de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{b}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se, dados quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{b}$, temos que $[X,Y] \in \mathfrak{g}$.*

Exemplo 2.2.8. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra abeliana. Então, todo subespaço de $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ é um ideal. De fato, se $X \in \mathfrak{g}$ temos que $[X,Y] = 0 \in \mathfrak{b}$.*

Outra subálgebra importante, particularmente para este texto é o centralizador de um subconjunto de um álgebra de Lie. Ele é constituído pelos elementos da álgebra que possuem colchete nulo com todos os elementos do conjunto, ou seja, são os elementos que comutam com todos estes. Mais precisamente:

Definição 2.2.4. *Seja B um subconjunto de $\mathfrak{g}$, chamamos de* centralizador *de B em $\mathfrak{g}$, ou simplesmente centralizador de B, ao conjunto*

$$z(B) = \{X \in \mathfrak{a} : [X,Y] = 0, \forall Y \in B\}. \quad (2.31)$$

O centralizador de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ é chamado de centro *de $\mathfrak{a}$ e é denotado por $c(\mathfrak{g})$.*

Segue imediatamente da identidade de Jacobi que $z(B)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Ainda, se $\mathfrak{g}$ é abeliana, então $c(\mathfrak{g})$ é a própria álgebra.

Outro conceito muito importante é o de quociente de álgebras de Lie. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{b}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{b}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, podemos tomar o quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} = \{X + \mathfrak{b}; X \in \mathfrak{g}\}$. Temos que $X + \mathfrak{g} = Y + \mathfrak{b}$ se, e somente se, $X - Y \in \mathfrak{b}$.

O quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ de fato é uma álgebra de Lie com o colchete

$$[(X + \mathfrak{b}), (Y + \mathfrak{b})] = [X, Y] + \mathfrak{b}, \tag{2.32}$$

pois se $(X + \mathfrak{g}) = (X_1 + \mathfrak{b})$ e $(Y + \mathfrak{g}) = (Y_1 + \mathfrak{b})$, então $X - X_1, Y - Y_1 \in \mathfrak{g}$ e, assim, $X = X_1 + Z_1$, $Y = Y_1 + Z_2$ com $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{b}$. Logo,

$$[X, Y] = [X, Y] + [x_1, Z_2] + [Z_1, Y_1] + [Z_1, Z_2]. \tag{2.33}$$

Como $\mathfrak{b}$ é ideal de $\mathfrak{g}$, os três últimos termos pertencem à $\mathfrak{b}$, portanto $[X, Y] + \mathfrak{b} = [X_1, Y_1] + \mathfrak{b}$. As demais propriedades do colchete decorrem do colchete da álgebra $\mathfrak{g}$.

A soma direta de álgebras de Lie também é uma álgebra de Lie. Seja $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie e portanto espaços vetoriais. Considerando a soma direta desses espaços vetoriais, tem-se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n. \tag{2.34}$$

Seja $[.,.]_i$ o colchete em $\mathfrak{g}_i$. Sejam $X = X_1 + \cdots + X_n$ e $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$ em $\mathfrak{g}$. Temos que $X + Y = (X_1 + Y_1) + \cdots + (X_n + Y_n)$ e $\alpha X = \alpha X_1 + \cdots + \alpha X_n$. É imediato que $\mathfrak{g}$ se torna uma álgebra de Lie com o colchete definido por

$$[X, Y] = [X_1, Y_1]_1 + \cdots + [X_n, Y_n]_n. \tag{2.35}$$

Dois importante agrupamentos de álgebras de Lie são as álgebras de Lie simples e semisimples. Uma álgebra de Lie é *simples*, se não possui um ideal não trivial, ou seja, $\{0\}$ e a própria álgebra, e *semissimples*, se não possui um ideal abeliano.

O Teorema de Levi é um resultado fundamental na teoria de álgebras de Lie, que descreve a estrutura de uma álgebra de Lie semissimples.

Teorema 2.2.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie finitamente gerada. Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então existe uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}$ é a soma direta de $\mathfrak{h}$ e de um um ideal solúvel.*

A saber, uma álgebra é dita *solúvel* se ela contiver uma sequência de ideais $I_0, I_1, \cdots, I_n$ tal que $0 = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n = \mathfrak{g}$ onde cada I_i é um ideal *nilpotente*. Um ideal nilpotente é um ideal onde a potência suficientemente alta da sequência de comutadores é o ideal trivial.

A demonstração do Teorema de Levi para álgebras de Lie semissimples pode ser encontrada em [17].

A estruturação de uma álgebra de Lie semissimples de acordo com o Teorema de Levi é crucial na classificação das álgebras de Lie e na compreensão da estrutura dos grupos de Lie associados. Como veremos, também é fundamental na teoria de representação de grupos de Lie, uma vez que álgebras de Lie semissimples desempenham um papel importante nesse contexto.

2.3 A aplicação exponencial

A aplicação exponencial: $\mathfrak{g} \to G$ é a principal forma de relacionarmos o grupo de Lie com a álgebra de Lie.

Pegando como exemplo o grupo $GL(n, \mathbb{R})$, sua álgebra de Lie, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, munido do colchete dado por $[A, B] = AB - BA$. Vamos considerar, para cada matriz $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, o campo de vetores

$$g \longmapsto Ag, \tag{2.36}$$

no espaço das matrizes. Esse campo induz a equação diferencial linear

$$\frac{dg}{dt} = Ag. \tag{2.37}$$

Esse é um sistema lienar $\frac{dx}{dt} = Ax, x \in \mathbb{R}^n$, repetido n vezes, uma vez para cada coluna da matriz g. A solução fundamental em $\mathbb{R}^n$ é

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(tA)^n \tag{2.38}$$

o que garante que a solução da equação (2.37) com condição inicial $g(0) = \mathbb{1}$ é $g(t) = e^{tA}$. Pode-se ver que essa solução está no grupo $GL(n, \mathbb{R})$ pois as exponenciais são matrizes invertíveis.

Exemplo 2.3.1: Seja $u \in \mathbb{H}$ um vetor unitário e imaginário puro. Então podemos escrever qualquer vetor do espaço $\mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k}$ na forma $u\theta$ e

$$e^{u\theta} = \cos\theta + u \operatorname{sen}\theta. \tag{2.39}$$

Vamos mostrar que o espaço $\mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k}$ mapeado em $SU(2)$, por meio da aplicação exponencial, é o espaço tangente à $SU(2)$ na identidade do grupo.

Tomemos um caminho suave definido no grupo $SU(2)$, $q(t)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $q(t)$ resulta em um quatérnion unitário e suporemos que $q(0) = \mathbb{1}$. Então $q'(0)$ é um vetor tangente à $SU(2)$. Como $q(t)$ é unitário, temos $q(t)\overline{q(t)} = \mathbb{1}$. Diferenciando e usando a regra da cadeia, temos

$$q'(0) + \overline{q'(0)} = 0 \tag{2.40}$$

Assim, todos vetores tangentes p à $SU(2)$ são antissimétricos e portanto imaginários puro. Por outro lado, como são imaginários puro, então $pt \in \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e sabemos que $e^{pt} \in SU(2)$. Portanto $q(t) = e^{pt}$ é um caminho em $SU(2)$. Esse caminho passa por $\mathbb{1}$ quando $t = 0$ e é suave pois tem sua derivada

$$q'(t) = pe^{pt}. \tag{2.41}$$

Dessa forma, com outros caminhos passando na identidade de $SU(2)$, obtém-se outros elementos do espaço tangente. O espaço tangente munido da operação colchete é a álgebra de Lie, $\mathfrak{su}(2, \mathbb{R})$, do grupo de Lie $SU(2)$.

A aplicação exponencial do grupo de Lie é um elemento básico para a teoria de Lie pois além de estabelecer a relação de um grupo com sua álgebra, estabelece o vínculo entre o colchete na álgebra e o produto no grupo, determinando completamente a estrutura do grupo de Lie a partir da álgebra.

Um exemplo de como esse vínculo é realizado é a apartir da *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*. Essa fórmula se escreve, para X e Y na álgebra de Lie, como

$$e^X e^Y = e^{c(X,Y)}, \tag{2.42}$$

em que $c(X,Y)$ é uma série que envolve apenas X e Y e seus colchetes sucessivos. Os primeiros termos dessa série são

$$c([X,Y]) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[[X,Y]Y] - \frac{1}{12}[[X,Y]X] + \cdots \tag{2.43}$$

e os demais termos envolvem colchetes com quatro ou mais elementos. Esta séria é universal no sentido dos termos homogêneos serem os mesmos para quaisquer grupos de Lie. Também, é convergente para pequenos valores de X e Y. Dessa forma, para um álgebra de Lie fixada $\mathfrak{g}$, a série é a mesma para quaisquer grupos de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pois os grupos são localmente isomorfos.

2.4 Representações de uma álgebra de Lie

A noção de representação de álgebras de Lie segue a mesma linha de raciocínio das representações de grupos, e por isso muito do que fora explanado sobre representações de grupos se aplica nas representações das álgebras. Agora, para as álgebras de Lie, devemos representá-las como transformações lineares.

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra das transformações lineares que atuam em V. Seja também $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) x \mapsto \rho(x), \tag{2.44}$$

tal que

$$\rho([x,y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x). \tag{2.45}$$

O espaço vetorial em questão é denominado o espaço da representação enquanto que sua dimensão é a dimensão da representação. Uma representação é dita *fiel* se $\mathrm{Ker}(\rho = \{0\})$.

Exemplo 2.4.1: Se $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ é subálgebra, a inclusão define, trivialmente, uma representação de $\mathfrak{g}$ em V denominada representação canônica.

Exemplo 2.4.2: A aplicação

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \mapsto \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{K}), \tag{2.46}$$

é uma representação de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$. De fato, seja a base $\{X,H,Y\}$ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$, onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Suas constantes de estrutura são dadas por

$$[H, X] = 2X, \ [H, Y] = -2Y, \ [X, Y] = H. \tag{2.48}$$

As imagens dos elementos dessa base formam uma base da imagem da representação que tem as mesmas constantes de estrutura.

Um subespaço W de V é dito invariante se

$$\rho(\mathfrak{g})W = \{\rho(x)w; x \in \mathfrak{g}, w \in W\} \subseteq W. \tag{2.49}$$

Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V é redutível se um subespaço invariante W existe. Portanto, uma representação é irredutível se os únicos espaços invariantes são os triviais, ou seja, $\{0\}$ ou o próprio V.

Uma representação é completamente redutível se V se decompõe como

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \tag{2.50}$$

em que V_i são invariantes e tal que a restrição de ρ à V_i é irredutível. Alternativamente, a representação é completamente redutível quando todo subespaço invariante W de V tem um complemento $\tilde{W}$ invariante, ou seja,

$$V = W \oplus \tilde{W}, \rho(\mathfrak{g})\tilde{W} \subseteq \tilde{W}. \tag{2.51}$$

Exemplos 2.4.3: Existe uma classe de álgebras de Lie (as semi-simples) para as quais todas as representações de dimensão finita são completamente redutíveis (teorema de Weyl). Para essa classe de álgebras, pode-se classificar, a menos de isomorfismo, suas representações de dimensão finita. O que, aliás, é feito classificando as representações irredutíveis.

2.4.1 Representação adjunta

A representação adjunta é uma maneira de representar os elementos de um grupo ou uma álgebra como transformações lineares.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ a álgebra de Lie das transformações lineares de $\mathfrak{g}$ nela mesma. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ definimos a transformação linear

$$\begin{aligned} ad(X) : & \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ & Y \mapsto ad(X)(Y) = [X, Y], \end{aligned} \tag{2.52}$$

a aplicação

$$\begin{aligned} ad : & \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ & X \mapsto ad(X) \end{aligned} \tag{2.53}$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$. Com efeito, é linear pela bilinearidade do colchete. Pela identidade de Jacobi, segue que

$$
\begin{aligned}
ad([X,Y])(Z) &= [[X,Y],Z] \\
&= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\
&= ad(X)(ad(Y)(Z)) - ad(Y)(ad(X)(Z)) \\
&= (ad(X)ad(Y)) - ad(Y)ad(X))(Z) \\
&= [ad(X), ad(Y)](Z). \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

Seja A_i uma base de $\mathfrak{g}$, os elementos da matriz representação adjunta de um elemento pode ser obtido notando que

$$ad(A_i)(A_j) = [A_i, A_j] = c_{ij}^k A_k, \qquad (2.55)$$

que segue que os elementos das matriz $ad(A_i)$ são dados por

$$(ad(A_i))_j^k = c_{ij}^k. \qquad (2.56)$$

2.5 Forma de Killing

Seja $\{X_1, \cdots, X_m\}$ uma base de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tomando X, Y elementos dessa base, definimos a quantidade

$$\eta(X,Y) \equiv Tr(ad(X) \circ ad(Y)), \qquad (2.57)$$

onde Tr é a função traço. Essa forma bilinear é simétrica, e satisfaz

$$\eta([X,Y],Z) + \eta(X,[Z,Y]) = 0, \qquad (2.58)$$

que segue devido à propriedade cíclica da função traço:

$$Tr([ad(X), ad(Y)], ad(Z)) = Tr(ad(X), [ad(Y), ad(Z)]). \qquad (2.59)$$

As componentes desse tensor são dadas por

$$\eta_{ij} = Tr(ad(X_i) \circ ad(X_j)), \qquad (2.60)$$

Ainda,

$$(ad(X_i) \circ ad(X_j))(X_k) = [X_i, [X_j, X_k]] = [X_i, c_{jk}^m X_m] = c_{jk}^m c_{im}^n X_n. \qquad (2.61)$$

Tomar o traço da matriz $ad(X_i) \circ ad(X_j)$ equivale a fazer $n = k$ e contrair o índice. Com isso, teremos

$$\eta_{ij} = c_{jn}^m c_{im}^n. \qquad (2.62)$$

Pelas constantes de estrutura, pode-se formar um tensor, uma métrica, a chamada forma de Killing, a partir da composição destas [18, p.8]:

$$g_{\sigma\lambda} = g_{\lambda\sigma} = c_{\sigma\rho}^{\tau} c_{\lambda\tau}^{\rho}. \qquad (2.63)$$

O critério de Cartan é enunciado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.5.1. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semisimples se, e somente,*

$$det|g_{\lambda\sigma}| \neq 0. \tag{2.64}$$

Em outras palavras, o tensor métrico inverso de $g_{\lambda\sigma}$, $g^{\lambda\sigma}$, existe e

$$g_{\lambda\sigma}g^{\sigma\tau} = \delta_{\lambda}^{\tau}, \tag{2.65}$$

onde

$$\delta_{\lambda}^{\tau} = \begin{cases} 1, & \tau = \lambda \\ 0, & \tau \neq \lambda \end{cases}.$$

Exemplo 2.5.1: Consideremos o grupo $SO(3)$. Uma rotação ao redor do eixo x,y e z são representadas, respectivamente, pelas matrizes

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.66}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.67}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

Para pequenos ângulos, temos $\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$ e daí a matriz de rotação em torno do eixo z pode ser escrita como

$$R_z(\theta) \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \theta L_3, \;\; L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

L_3 é a matriz geradora das rotações em torno do eixo z. Podemos verificar que realmente é um gerador apartir da expressão

$$R_z(\theta) = \exp\{\theta L_3\}, \;\; L_3 = \frac{dR(\theta)}{d\theta}\|_{\theta=0}. \tag{2.70}$$

Da mesma forma obtém-se os geradores das matrizes de rotação ao redor do eixo x e y:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \;\; L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

onde L_2 e L_1 são os geradores das rotações em y e x, respectivamente. Esta representação é fiel: cada matriz se identifica com um único elemento da álgebra. Como não existe uma transformação para diagonalizar simultaneamente estas três matrizes, esta representação é irredutível.

As relações de comutação são dadas por

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k. \tag{2.72}$$

A representação adjunta dos elementos da base pode ser obtida de forma explícita utilizando a equação (2.56). Com isso, observa-se que as matrizes da representação adjunta têm a mesma forma que L_1, L_2, L_3 na equação (2.71) e (2.69).

Utilizando a equação (2.63), a forma de Killing para a álgebra $\mathfrak{so}(3)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2.73}$$

Em uma forma compacta, pode ser expressa como $g_{ij} = -2\delta ij$. Pela critério de Cartan, como o determinante da forma de Killing é diferente de zero, e portanto a álgebra $\mathfrak{so}(3)$ é semissimples.

Exemplo 2.5.2 A álgebra de Lie associada ao grupo $SU(2)$, denotada por $\mathfrak{su}(2)$ possui uma base geradora dada pelas matrizes de Pauli:

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \; T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.74}$$

Elas satisfazem a relação de comutação

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k. \tag{2.75}$$

As matrizes da equação (2.74) definem o que é chamado de representação spinorial da álgebra $\mathfrak{su}(2)$.

A partir da equação (2.56), obtemos a representação adjunta (em três dimensões) de $\mathfrak{su}(2)$.

$$[ad(T_1)] = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; [ad(T_2)] = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; [ad(T_3)] = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.76}$$

Como as constantes de estrutura (as matrizes das representação adjunta dos elementos das bases) de $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$ são as mesmas, essas álgebras são isomórfas.

2.6 Álgebra envelopante universal

É sabido que certas propriedades dos grupos de Lie podem ser capturadas por um ambiente linear, sua respectiva álgebra (por exemplo a existência de um subgrupo invariate implicar na existência de um ideal). Ainda, certas características podem ser perdidas na hora de representarmos a álgebra de Lie. Dessa forma, se faz necessário a construção de um meio para que tais propriedades sejam conservadas. A álgebra envelopante universal é construída de maneira que as propriedades relacionadas ao produto dos elementos de uma representação sejam preservadas e, além disso, é uma álgebra associativa que contém $\mathfrak{g}$. Dessarte, é tal que toda representação ρ de $\mathfrak{g}$ se "estende" a uma representação de $U(\mathfrak{g})$.

2.6.1 Definição

A álgebra envelopante de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um mapa $\epsilon : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ em que $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa[1] com unidade e que

i) ϵ é um homomorfismo de álgebra de Lie, ou seja, é linear e

$$\epsilon[x, y] = \epsilon(x)\epsilon(y) - \epsilon(y)\epsilon(x). \tag{2.77}$$

ii) Se A é uma álgebra associativa com unidade e $\alpha : \mathfrak{g} \to A$ é qualquer homomorfismo de álgebra de Lie, então existe um único homomorfismo ϕ tal que

$$\alpha = \phi \circ \epsilon. \tag{2.78}$$

Como, por definição, só há uma única aplicação entre as álgebras associativas, dá-se o nome de universal. Ainda, para toda álgebra de Lie, há uma álgebra envelopante universal canônica, dada pelo produto tensorial. Isso se deve ao fato de que o produto tensorial entre espaços vetoriais satisfazem as duas condições exigidas acima. Esse resultado, junto com a construção do produto tensorial entre espaços vetorias, se encontra detalhado no apêndice B deste trabalho.

2.6.2 O produto tensorial de duas álgebras

Se A e B são álgebras, e portanto dois espaços vetoriais, podemos definir uma estrutura em $A \otimes B$ por:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2. \tag{2.79}$$

Se A e B são álgebras associativas então $A \otimes B$ também será. Mais ainda, se todas são unitais, então o elemento unital do produto delas é o produtor unital de cada um deles, isto é, $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$. É fácil ver que há um isomorfismo de A e $A \otimes B$ dado por

$$a \mapsto a \otimes \mathbb{1}, \tag{2.80}$$

quando ambos A e B são álgebras associativas com unidade. Da mesma forma para B. Pode-se notar que

$$(a \otimes \mathbb{1}) \cdot (\mathbb{1} \otimes b) = a \otimes b = (\mathbb{1} \otimes b) \cdot (a \otimes \mathbb{1}). \tag{2.81}$$

E também que um elemento da forma $a \otimes \mathbb{1}$ comuta com um elemento da forma $\mathbb{1} \otimes b$.

2.6.3 A álgebra tensorial de espaços vetoriais

A algebra tensorial de um espaço vetorial, denotada por $T(V)$, consiste em um mapa $\iota : V \to T(V)$ tal que ι é linear e, para qualquer mapa linear $\alpha : V \to A$ onde A é uma álgebra associativa. Então existe um único homomorfismo $\psi : T(V) \to A$ tal que $\alpha = \psi \circ \iota$. Coloca-se

$$T^n(V) := V \otimes \cdots \otimes V, \;\; n - vezes. \tag{2.82}$$

[1]Uma álgebra associativa com unidade são estruturas algébricas munidas de operações associativas como a soma e multiplicação. A unidade advém da existência de um elemento unitário para a multiplicação.

Definimos que o produto tensorial entre duas álgebras como

$$T^n(V) \otimes T^m(V) \to T^{n+m}(V). \tag{2.83}$$

Portanto,

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^{\otimes n} = \mathbb{K} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \cdots \tag{2.84}$$

(em que $T^0 V$ é o corpo onde o espaço V está definido), é uma solução para esse problema universal, e consequentemente a única solução.

2.6.4 Construção da álgebra envelopante universal de álgebras de Lie

Para a construção da álgebra envelopante universal de uma álgebra de Lie, é conveniente que se faça uma possível explanação sobre quocientes de ideais de álgebras associativas.

Dada uma álgebra associativa, um ideal $\mathfrak{b}$ é dito bilateral se, para $b \in \mathfrak{b}$ e $a \in \mathfrak{g}$, então ambos ab e ba pertencem à $\mathfrak{b}$. Como o ideal é um subespaço de $\mathfrak{g}$, é possível formar um quociente desses espaços e o produto em $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ é definido como

$$(X + \mathfrak{b})(Y + \mathfrak{b}) = XY + \mathfrak{b}, \tag{2.85}$$

com $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Com isso, seguindo a ideia básica de que $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa gerada por $\mathfrak{g}$, ou seja, os elementos de $U(\mathfrak{g})$ devem ser justaposição de elementos de $\mathfrak{g}$. Portanto,

$$T(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n}. \tag{2.86}$$

Seus elementos são combinações finitas dos monômios da forma

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n, \tag{2.87}$$

com $X_i \in \mathfrak{g}$. A multiplicação entre esses elementos é da forma

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n. \tag{2.88}$$

A inclusão $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$ não é um homomorfismo de álgebra de Lie definida em $T(\mathfrak{g})$ pelo comutador. Isso por que existem elementos do tipo $XY - YX$ que não são iguais a $[X, Y]$, pois o primeiro é um elemento de ordem dois de $T(\mathfrak{g})$, uma vez que é a multiplicação de dois elementos, enquanto que o primeiro é de ordem um. Esse homomorfismo se consegue tomando o quociente da álgebra tensorial pelo ideal bilateral $\mathfrak{b}$:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathfrak{b}, \tag{2.89}$$

em que $\mathfrak{b}$ é gerado pelo monômios da forma

$$XY - YX - [X, Y] \in T(\mathfrak{g}). \tag{2.90}$$

Dessa forma, elementos na forma

$$X_1 \cdots XY \cdots X_n = X_1 \cdots YX \cdots X_n + X_1 \cdots [X,Y] \cdots X_n, \tag{2.91}$$

estão em $U(\mathfrak{g})$ mas não em $T(\mathfrak{g})$. Os produtos em $U(\mathfrak{g})$ são dados na mesmo forma como justaposição de monômios.

Uma representação ρ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial V de dimensão finita se estende a uma representação $\tilde{\rho}$ de $U(\mathfrak{g})$ que é definida por monômios

$$\tilde{\rho}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = \rho(X_1) \otimes \cdots \otimes \rho(X_n). \tag{2.92}$$

Exemplo 2.5.1: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra abeliana. Então, $[X,Y] = 0$ para quaisquer elementos de $\mathfrak{g}$. Dessa forma, a identificação que se faz em $T(\mathfrak{g}$ para obter $U(\mathfrak{g})$ é a dada por XY = YX e, portanto, $U(\mathfrak{g})$ é a álgebra simétrica, que é abeliana.

Capítulo 3

Operadores de Casimir na mecânica quântica

A existência de um operador de Casimir não trivial foi estabelecida para as álgebras semissimples. O cálculo dos autovalores desses operadores é de interesse na teoria dos grupos, obviamente, e também na física. Na física, mais especificamente na mecânica quântica, a primeira que pode vir à mente é que a determinação de todos operadores de Casimir equivale a determinar o conjunto de observáveis que comutam entre si. No entanto, esses invariantes são fundamentais na classificação dos estados de muitas partículas [19] e no cálculo dos níveis de energia dos átomos e núcleos para o *Nuclear shell model* [20] [21] [22].

Em contextos geométricos, como na teoria de variedades diferenciáveis, os operadores de Casimir estão relacionados a quantidades geométricas invariantes. Eles podem ser expressos em termos de tensores métricos e conexões e estão associados a invariantes geométricos que não mudam sob difeomorfismos [23]. Na teoria de representações, fornecem os valores próprios (autovalores) que caracterizam as representações irredutíveis [24].

Esses invariantes podem ser encontrados para quaisquer álgebra de Lie semissimples. Segue o teorema devido ao físico Giulio Racah para esses invariantes [25]:

Teorema 3.0.1. *Para qualquer álgebra de Lie semissimples de* rank l*, existe um conjunto de* l *operadores de Casimir. Estes são funções dos geradores da álgebra, isto é,* $C_\lambda(L_1, \cdots, L_n)$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, l)$*, e que comutam com todos os outros elementos dessa álgebra, inclusive com eles mesmos. Os autovalores desses operadores caracterizam os multipletos do grupo*[1]*.*

3.1 Definição

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples, $U(\mathfrak{g})$ sua álgebra envelopante universal, e $z(U(\mathfrak{g}))$ o centro de $U(\mathfrak{g})$. Os elementos de $z(U(\mathfrak{g}))$ são chamados de *operadores de Casimir*, ou *invariantes de Casimir*.

A importância de se conhecer e construir o conjunto de operadores de Casimir, para a teoria de representação, advém do *Lema de Schur*. Em qualquer representação ρ tem-se que

[1] Um multipleto é um subespaço irredutível invariante do grupo. Em termos de teoria de grupo, um multipleto é o conjunto de estados degenerados.

$$[\rho(c), \rho(x)] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}. \tag{3.1}$$

Consequentemente, se uma representação é irredutível, $\rho(c)$ deve ser um múltiplo da indentidade do grupo. O número λ que multiplica a identidade depende da escolha da representação e do operador de Casimir C e é chamado de autovalor do operador.

Para o caso no qual duas representações são equivalentes, esses autovalores são iguais. Isso significa que os autovalores de $\rho(c)$ podem ser usados para distinguir representações irredutíveis não equivalentes. Se $\rho(c)$ é completamente redutível, podemos conhecer os invariantes de $\mathfrak{g}$ na decomposição de ρ em componentes irredutíveis.

Para uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples de rank[2] n, existem n operadores de Casimir, $C_{p_1}, \cdots, Cp_n$ com as seguintes propriedades:

i) Um operador de casimir C_p é um polinômio homogêneo de grau p nos elementos de $\mathfrak{g}$.

ii) Um operador de Casimir arbritrário pode ser escrito como uma expressão polinomial em termos dos operadores $C_{p_1}, \cdots, Cp_n$. Em outras palavras, $C_{p_1}, \cdots, Cp_n$ é um conjunto gerador da álgebra $U(\mathfrak{g})$.

iii) O conjunto dos autovalores de cada um dos operadores de Casimir caracteriza, unicamente, representações irredutíveis de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Se duas representações irredutíveis ρ_1 em V_1 e ρ_2 em V são equivalentes, ou seja, existe uma tranformação lienar $T : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\rho_2(X) = T \circ \rho_1(x)T^{-1}$, então temos necessariamente que $\lambda_1 = \lambda_2$ para um dado operador de Casimir. Se ρ é completamente redutível, podemos conhecer os invariantes da álgebra na decomposição da representação em componentes irredutíveis.

3.2 Invariantes de Casimir quadráticos.

Daqui em diante iremos nos referir aos operadores das representações de uma álgebra de Lie com o acento circunflexo.

Em geral, não há um método para construir um operador de Casimir para álgebras de Lie simissimples. Para cada grupo, existe construções desses invariantes dentro de certas particularidades [26–31]. Apenas para os grupos $SU(n)$, Biedenharn [32] foi capaz mostrar que os operadores de Casimir são polinômios homogêneos cujas variáveis são os geradores:

$$\hat{C}_\lambda = \sum_{i,j} a^\lambda_{ij} \cdots \hat{L}_i \hat{L}_j \cdots , \tag{3.2}$$

em que a^λ_{ij} são funções bem definidas das constantes de estrutura.

Consideremos uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples de dimensão finita e cuja base é dada pelo conjunto $\gamma = \{\hat{X}_1, \cdots, \hat{X}_n\}$. Agora, consideremos a base dual $\gamma' = \{\hat{Y}^1, \cdots, \hat{Y}^n\}$ tais que $\eta(\hat{X}_i, \hat{Y}_j) = \delta^j_i$, em que η é a forma de Killing. Um elemento $\hat{X}$ da álgebra $\mathfrak{g}$ pode ser escrito como

$$\hat{X} = \eta(\hat{X}, \hat{Y}^1)\hat{X}_1 + \cdots + \eta(\hat{X}, \hat{Y}^n)\hat{X}_n. \tag{3.3}$$

[2]Fazendo um parelelo com a álgebra linear, o rank (ou posto) de uma matriz é o número de linhas ou colunas linearmente independentes.

Ainda, escrevendo $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_k c^k_{ij}\hat{X}_k$ e $[\hat{X}_i, \hat{Y}^k] = \sum_n d^k_{ni}\hat{X}^n$, pela invariância da forma de Killing (2.58), tem-se

$$-c^k_{ij} = \eta([\hat{X}_i, \hat{X}_j], \hat{Y}_k) = -\eta(\hat{X}_j, [\hat{X}_i, \hat{Y}^k]) = d^k_{ji}. \tag{3.4}$$

Consideremos o operador

$$\hat{C} = \hat{X}_1\hat{Y}^1 + \cdots + \hat{X}_n\hat{Y}^n. \tag{3.5}$$

Este operador é conhecido como o *Operador de Casimir quadrático*, ou *Invariante de Casimir quadrático*, isto é, um polinômio homogêneo de grau 2 nos elementos de $\mathfrak{g}$. De fato, $\hat{C}$ definido como acima comuta com qualquer elemento da álgebra:

$$\begin{aligned}
[\hat{X}_i, \sum_j \hat{X}_j\hat{Y}^j] &= \sum_j [\hat{X}_i, \hat{X}_j\hat{Y}^j] \\
&= \sum_j \{\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{Y}^j - \hat{X}_j\hat{Y}^j\hat{X}_i\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Somando e subtraindo o produto $\hat{X}_j\hat{X}_i\hat{Y}^j$, obtém-se

$$\begin{aligned}
[\hat{X}_i, \sum_j \hat{X}_j\hat{Y}^j] &= \sum_j \{\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{Y}^j - (\hat{X}_j\hat{X}_i\hat{Y}^j) + (\hat{X}_j\hat{X}_i\hat{Y}^j) - \hat{X}_j\hat{Y}^j\hat{X}_i\} \\
&= \sum_j \{[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\hat{Y}^j + \hat{X}_j[\hat{X}_i, \hat{Y}^j]\} \\
&= \sum_{j,k} \{c^k_{ij}\hat{X}_k\hat{Y}^j + \hat{X}_j d^j_{ki}\hat{Y}^k\}.
\end{aligned}$$

Utilizando a equação (3.4), temos

$$\sum_{j,k} \{c^k_{ij}\hat{X}_k\hat{Y}^j + \hat{X}_j d^j_{ki}\hat{Y}^k\} = \sum_{j,k} \{c^k_{ij}\hat{X}_k\hat{Y}^j - \hat{X}_j c^j_{ik}\hat{Y}^k\}. \tag{3.7}$$

Ainda, visto que no segundo termo os índices j e k são mudos, podemos renomeá-los como $j \to k$ e $k \to j$. Com isso, teremos

$$\sum_{j,k} \{c^k_{ij}\hat{X}_k\hat{Y}^j - c^k_{ij}\hat{X}_k\hat{Y}^j\} = 0. \tag{3.8}$$

3.3 Mecânica Quântica

A mecânica quântica é o ramo da física que se dedica a estudar fenômenos relevantes na escala subatômica, como por exemplo a dinâmica de partículas subatômicas, como os prótons, elétrons e fótons. Na mecânica clássica, o estado de uma partícula é determinado por um ponto no espaço de fase e, uma vez conhecido, o presente e futuro do corpo é determinado. Em contrapartida, a mecânica quântica possui um carácter probabilístico em relação a aferição das variáveis.

A visualização probabilística da função de onda dos estados se deve à Max Born, formulada na década de 1920, isso junto com a interpretação de Copenhague Também, a interpretação da Entretanto, é importante observar que esta é apenas uma das interpretações possíveis da mecânica quântica, e existem outras interpretações que abordam a questão da probabilidade de maneiras diferentes. Os principais pontos da interpretação de Copenhague incluem:

- Estado de Superposição: Antes da medição, um sistema quântico pode existir em uma superposição de estados possíveis.
- Colapso da Função de Onda: Quando uma medida é realizada, a superposição de estados colapsa em um estado específico com probabilidades dadas pelas amplitudes de probabilidade associadas ao estado original.
- Indeterminação e Princípio da Incerteza: reconhece a limitação fundamental na precisão com que certas propriedades conjugadas podem ser conhecidas simultaneamente, como expresso no Princípio da Incerteza de Heisenberg.
- Papel do Observador: O ato de medição é crucial para definir um estado específico do sistema, e a teoria não fornece uma descrição completa do sistema sem a interação com um observador.

A teoriada mecânica quântica, desenvolvida no século XX, leva em conta o carácter ondulatório da matéria, a dualidade onda-partícula, prevista pelo físico francês Louis de Broglie. Nessa teoria, a dinâmica dos objetos é regida pela equação de Schröndinger,

$$i\hbar\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{3.9}$$

em que $\vec{\psi}$ é a função de onda do estado de uma partícula, $\hat{H}$ é a hamiltoniana do sistema em questão e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida.

3.3.1 Estados e operadores lineares.

Um estado de um sistema mecânico quântico é representado por um vetor unitário[3] em um espaço de Hilbert complexo, $\mathcal{H}$. Dito de outra forma, são os pontos da esfera complexa de raio unitário em um espaço de Hilbert. Cada direção representa um estado diferente, porém, pontos nessa esfera que diferem por um fator de fase global são tratados como o mesmo estado.

Esses vetores são denotados usando a notação de Dirac, isto é, o estado é denotado como $|\psi\rangle$ e é chamado de ket. Ainda, decorre de um dos axiomas da mecânica quântica que se dois estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são estados possíveis, qualquer combinação linear

$$\alpha\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle\,, \tag{3.10}$$

com α e β complexos, também é um estado possível.

Uma base utilizada para construir o espaço-estado do sistema é dado pelo conjunto de autovetores, ou autoestados, do operador hamiltoniano. Nesse caso, se $|\lambda\rangle$ é um autoestado, λ é o autovalor associado a ele. Ter posse do autovalor e autovetor de um operador se faz necessário e conveniente por diversos motivos: construir uma base para o espaço como fora dito acima, construir a operação representação matricial desse operador e saber o resultado de uma medida.

[3]Isso decorre do fato de que a norma (ou comprimento) de um vetor de estado, quando elevada ao quadrado, fornece a probabilidade de encontrar o sistema no estado correspondente.

Na mecânica quântica, as grandezas físicas que podem ser medidas experimentalmente são chamadas de observáveis. São exemplo de observáveis a posição, o momento e a energia. Essas grandezas estão associados a um operador hermitiano que atua em um espaço de Hilbert. Ainda, o postulado da medida, enunciado por Von Neumann-Lüders, diz que quando um observável A é medido, o resultado é um autovalor de A.

É postulado também que há uma relação unívoca entre um ket $|\psi\rangle$ e seu dual $\langle\psi|$, chamado bra. Dessa forma, pode-se entender o espaço dos bras como sendo um tipo de imagem especular do espaço dos kets. A mesma interpretação é usada para um espaço dual V^* de um espaço vetorial V qualquer. Ainda, postula-se que o bra dual à $\alpha\,|\psi\rangle$ é $\alpha^*\,\langle\psi|$, e não $\alpha\,\langle\psi|$.

O produto interno entre um bra e um ket é postulado como

$$(\langle\psi|)\cdot(|\phi\rangle) = \langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*, \tag{3.11}$$

que dá, em geral, um número complexo.

Um segundo postulado sobre o produto interno na mecânica quântica é

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0. \tag{3.12}$$

Este sinaliza a existência de uma métrica positiva definida. Segue imediatamente que $\langle\psi|\psi\rangle$ é real e a igualdade é válida quando $|\psi\rangle$ é o vetor nulo. Este postulado se dá devido a interpretação probabilística.

Consideremos dois sistemas S_1 e S_2 com estados representados por vetores nos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$, de base $\{e_i\}$, e $\mathcal{H}_2$, de base $\{f_K\}$, respectivamente. Um estado do sistema composto é representado por um vetor no espaço $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Um elemento genérico da base desse novo sistema é denotado por $|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle$ ou $|e_i, f_k\rangle$. O produto interno $(\cdot,\cdot)$ em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é construído a partir do produto interno nos espaços em $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$,

$$(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle\,, |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle) := \langle\psi_1|\phi_1\rangle\,\langle\psi_2|\phi_2\rangle\,. \tag{3.13}$$

Os operadores que atuam no espaço dos kets são operadores lineares. Quando um operador atua pela esquerda em um ket,

$$\hat{X}(|\psi\rangle) = \hat{X}\,|\psi\rangle = |\phi\rangle\,, \tag{3.14}$$

o resultado é outro ket. Quando, para qualquer $|\psi\rangle$, a atuação de um opeador retorna o vetor nulo, o operador em questão é chamado de *operador nulo*. Os operadores atuam no espaço dos bras pela direita,

$$(\langle\psi|)\hat{X} = \langle\psi|\,\hat{X} = \langle\phi|\,. \tag{3.15}$$

O ket $\hat{X}\,|\psi\rangle$ e o bra $\langle\psi|\,\hat{X}$ não são, em geral, o dual um do outro. Para que isso seja verdade, o operador $\hat{X}$ deve ser autoadjunto, também chamado de *hermitiano* e denotado por $\hat{X}^\dagger$.

Em um sistema composto, a atuação de um operador se dá pelo produto tensorial dos operadores definidos em cada um dos espaços que o compõe. Se $\hat{A} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{V}_1$ e $\hat{B} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{V}_2$, então

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) := (\hat{A}\,|\psi_1\rangle) \otimes ((\hat{B}\,|\psi_2\rangle)) \tag{3.16}$$

e a definição se extende à estados gerais por linearidade.

A aplicação de um operador sobre um ket é melhor visualizada quando representamos o operador matricialmente. Essa representação pode ser feita utilizando uma base $\{a^{(i)}\}$:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \left\langle a^{(1)} \middle| \hat{X} \middle| a^{(1)} \right\rangle & \left\langle a^{(1)} \middle| \hat{X} \middle| a^{(2)} \right\rangle & \cdots \\ \left\langle a^{(2)} \middle| \hat{X} \middle| a^{(1)} \right\rangle & \left\langle a^{(2)} \middle| \hat{X} \middle| a^{(2)} \right\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Um conjunto de observáveis $\{\hat{S}_1, \cdots, \hat{S}_r\}$, que são dois a dois comutantes, ou seja $[\hat{S}_j, \hat{S}_k] := \hat{S}_j\hat{S}_k - \hat{S}_k\hat{S}_j$; $j, k = 1, \cdots, r$, são ditos compatíveis. Portanto, esse conjunto de observáveis admitem os mesmos autovetores [33].

3.4 Momento angular

Os operadores de Casimir desempenham um papel crucial na classificação e compreensão dos momentos angulares mais gerais em sistemas quânticos, especialmente em contextos onde há simetria. Seus autovalores são utilizados para entender a degenerescência dos estados relacionados ao momento angular indicando como diferentes estados quânticos podem compartilhar a mesma energia.

No caso do átomo de hidrogênio (em geral, em um problema de campo central, isto é, com energia potencial $U = U(r)$), o grupo de simetria relevante é o grupo de rotação tridimensional $SO(3)$. Os operadores de casimir relacionados a esse grupo são os operadores definidos no centro da álgebra $\mathfrak{so}(3)$ que obedecem a mesma álgebra dos geradores de $\mathfrak{su}(2)$.

No contexto da mecânica quântica, as relações de comutação fundamentais do momento angular são dadas por [12, p.162]

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \hbar i \epsilon_{ijk} \hat{J}_k \tag{3.18}$$

em que os $\hat{J}_k$, $k = 1, 2, 3$ são os geradores de rotações infinitesimais discutidos no exemplo 2.5.2 da seção 2.5. Aqui a constante $\hbar$, que representa a unidade básica do momento angular e i a unidade imaginária e que não aparece na regra de comutação usual dos geradores de $SO(3)$. O operador de Casimir associado a essa álgebra é o operador quadrático

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2. \tag{3.19}$$

Tradicionalmente, escolhe-se o operador $\hat{J}_z$ para ser diagonalizável simultaneamente com $\hat{J}^2$. Os autovatores simultâneos desses operadores serão denotados por $|\beta, m\rangle$ e seus autovalores são, respectivamente:

$$\hat{J}^2 |\beta, m\rangle = \beta |\beta, m\rangle \tag{3.20}$$

$$\hat{J}_z |\beta, m\rangle = m |\beta, m\rangle . \tag{3.21}$$

Para determinar os valores permitidos de β e m, é conveniente trabalhar com os operadores não hermitianos

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y, \tag{3.22}$$

os chamados operadores de escada[4]. Ainda, esses operadores satisfazem as relações de comutação

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar\hat{J}_z \tag{3.23}$$
$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = 2\hbar\hat{J}_\pm, \tag{3.24}$$

que são obtidas a partir de (3.18). Também,

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0. \tag{3.25}$$

Os operadores de escada são assim chamados por aumentarem e/ou diminuírem os autovalores de $\hat{J}_z$, pois

$$\begin{aligned}\hat{J}_z\hat{J}_\pm |\beta, m\rangle &= ([\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] + \hat{J}_\pm\hat{J}_z) |\beta, m\rangle \\ &= (\beta \pm 1)\hat{J}_\pm |\beta, m\rangle \end{aligned} \tag{3.26}$$

Agora podemos construir os autovetores de momento angular e estudar seu espectro de autovalores. Como a dimensão do espaço é finita, há finitos autovalores m de $\hat{J}_z$ para dado β[5] e portanto deve haver um autoestado associado a um maior autovalor e a um menor autovalor. Sendo β o maior autovalor possível, tem-se, necessariamente, que

$$\hat{J}_+ |\beta, m_{max}\rangle = 0. \tag{3.29}$$

Os outros autoestados podem ser obtidos a partir de $|\beta, \beta\rangle$ quando aplicado $\hat{J}_-$ sucessivamente. E, devido à existência do menor autovalor, existe um inteiro positivo l tal que

$$(\hat{J}_-)^{l+1} |\beta, m_{max}\rangle = \hat{J}_- |\beta, m_{min}\rangle = 0. \tag{3.30}$$

No intuito de encontrar o vínculo entre o autovalor do operador de Casimir com os autovalores de $\hat{J}_z$, aplicamos $\hat{J}_-$ na equalção (3.29):

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ |\beta, m_{max}\rangle = 0 \tag{3.31}$$

Contudo,

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z. \tag{3.32}$$

[4]Pode-se notar que $\hat{J}_\pm \notin \mathfrak{su}(2)$ pois estamos escrevendo-os como combinação linear complexa dos geradores. Permitindo a combinação linear com complexos, tem-se a extensão complexa de $\mathfrak{su}(2)$.

[5]Escrevendo $\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)$ e tomando o valor médio de $\hat{J}^2 - \hat{J}_z$ em relação ao estado qualquer $|\beta, m\rangle$, tem-se por outro lado,

$$\frac{1}{2} \langle\beta, m| \hat{J}_+\hat{J}_+^\dagger |\beta, m\rangle + \frac{1}{2} \langle\beta, m| \hat{J}_+^\dagger\hat{J}_+ |\beta, m\rangle . \tag{3.27}$$

Notando que o ket resultante de $\hat{J}_+^\dagger |\beta, m\rangle$ tem o bra $\langle\beta, m| \hat{J}_+$ correspondente, isso resulta de no módulo desse estado ao quadrado que, por ser um espaço de métrica positiva, o lado direito é maior ou igual a zero e segue que

$$\beta \geq m^2. \tag{3.28}$$

Portanto,

$$(\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z)\,|\beta, m_{max}\rangle = (\beta - m_{max}^2 - \hbar m_{max})\,|\beta, m_{max}\rangle = 0. \tag{3.33}$$

Como o ket $|\beta, m_{max}\rangle$ não é o ket nulo, e equação acima só é válida se

$$\beta = m_{max}(m_{max} + \hbar). \tag{3.34}$$

Uma outra equação de vínculo é encontrada trabalhando com a equação (3.30): aplicando o operador $\hat{J}_+$, se tem

$$\hat{J}_+\hat{J}_-\,|\beta, m_{min}\rangle = 0. \tag{3.35}$$

Escrevendo $\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z$, resulta

$$(\beta - m_{min}^2 + \hbar m_{min})\,|\beta, m_{min}\rangle = 0. \tag{3.36}$$

Pelo mesmo argumento usado na equação (3.34), conclui-se que

$$\beta = m_{min}(m_{min} - \hbar). \tag{3.37}$$

Daí, é fácil ver que

$$m_{max} = -m_{min} \tag{3.38}$$

e, portanto,

$$-m_{max} \leq m \leq m_{max}. \tag{3.39}$$

Para finalizar, é necessário encontrar o inteiro l que aparece na equação (3.30). Para isso, basta notar que, como os autovalores são aumentados por uma unidade de $\hbar$, então

$$m_{max} = m_{min} + l\hbar. \tag{3.40}$$

Utilizando a equação (3.38), conclui-se que

$$l = 2\beta, \tag{3.41}$$

ou seja, m pode assumir $2\beta + 1$ valores. Definindo $j \equiv \beta/\hbar$, pela equação (3.34), implica que o autovalor de J^2 é $\hbar^2 j(j+1)$. Desse modo, m pode assumir os valores $-j, -j+1, \cdots, j-1, j$, com j inteiro ou semi-inteiro.

A construção da matriz explícita dos operadores estudados aqui é efetuada facilmente utilizando (3.17) e partindo do pressuposto que os estados $|j, m\rangle$ são normalizados. Os elementos das matrizes do operador de Casimir do momento angular, J^2, e do operador J_z são

$$\langle j', m'|\,\hat{J}^2\,|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm} \tag{3.42}$$

e

$$\langle j', m'|\,\hat{J}_z\,|j, m\rangle = m\hbar\delta_{j'j}\delta_{m'm}. \tag{3.43}$$

Antes de calcular os elementos da matriz dos operadores $\hat{J}_\pm$, veremos como estes atuam em um estado $|j, m\rangle$. Sabemos $\hat{J}_\pm$ que aumentam ou diminuiem por uma unidade o valor de m, portanto $\hat{J}_+\,|j, m\rangle \propto |j, m+1\rangle$ e $\hat{J}_-\,|j, m\rangle \propto |j, m-1\rangle$. Para determinar as constantes de proporcionalidade, usaremos a condição de normalização dos estados $\hat{J}_\pm\,|j, m\rangle$ e seu respectivo bra $\langle j, m|\,\hat{J}_\pm^\dagger$:

$$\langle j,m|\,\hat{J}_{\pm}^{\dagger}\hat{J}_{\pm}\,|j,m\rangle = |c_{\pm}|^2. \tag{3.44}$$

Por outro lado, $\hat{J}_{\pm}^{\dagger}\hat{J}_{\pm} = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 \pm \hbar\hat{J}_z$ e, daí,

$$\langle j,m|\,\hat{J}_{\pm}^{\dagger}\hat{J}_{\pm}\,|j,m\rangle = \hbar^2[j(j+1) - m^2 \pm m]. \tag{3.45}$$

Logo, escolhendo os valores reais positivos para $c_{\pm}$, obtém-se

$$\hat{J}_{\pm}\,|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m^2 \pm m}\,|j,m\pm 1\rangle\,. \tag{3.46}$$

Finalmente, os elementos de $J_{\pm}$ são

$$\langle j',m'|\,\hat{J}_{\pm}\,|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m^2 \pm m}\ \delta_{j'j}\delta_{m'm\pm 1}. \tag{3.47}$$

Podemos ver como os operadores de Casimir são ferramentas matemáticas poderosas para entender e classificar o momento angular em sistemas quânticos com simetria rotacional, desempenhando um papel essencial na determinação da estrutura dos estados quânticos e na análise da degenerescência associada.

3.5 Simetrias na mecânica quântica

3.5.1 Simetria clássica

Na mecânica lagrangiana, uma simetria pode ser encontrada quando, sob um deslocamento em uma de suas coordenadas $q_i \to q_i + \delta q_i$, com q_i uma coordenada generalizada, a função lagrangiana L não é alterada, ou seja, $\partial L/\partial q_i = 0$.

Com isso, segue da equação de Lagrange, $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i) = \partial L/\partial q_i$, que

$$\frac{dp_i}{dt} = 0, \tag{3.48}$$

em que o momento canônico é definido via $\partial L/\partial \dot{q}_i$.

Na formulação Hamiltoniana da mecânica clássica, uma grandeza é conservada se a função hamiltoniana do sistema, $H = H(q,p)$, não dependende explicitamente da coordenada associada q_i, pois

$$\partial H/\partial q_i = \dot{p}_i. \tag{3.49}$$

Isso é outra maneira de dizer que H tem uma simetria por uma translação $q_i \to q_i + \delta q_i$.

3.5.2 Simetria quântica

Na mecânica quântica, para G ser uma quantidade conservada, a hamiltonina do sistema deve ser invariante sob conjugação, isto é,

$$G^{\dagger}HG = H. \tag{3.50}$$

Mas isso equivale a

$$[G,H] = 0. \tag{3.51}$$

Estamos encarando aqui a invariância de H no sentido que sua aferiação não é alterada quando antes é afetuada uma medida de G. Portanto, os valores de H são "invariantes por G". Com isso, pela dinânica de Heisenberg,

$$\frac{dG}{dt} = 0, \tag{3.52}$$

e então G é constante de movimento. Por exemplo, se H for invariante sob translação, que são geradas pelo operador do momento linear $\hat{p}$, então este é uma constante de movimento; se H for invariante sob rotação, então o momento angular é uma constante de movimento.

Dessa forma, é fácil identificar a relevância dos operadores de Casimir em um sistema hamiltoniano: a identificação dos invariantes revelam as grandezas associadas a este que são conservadas, que são constantes de movimento. Ainda, o grupo ao qual esses operadores pertencem são os grupos de simetrias do sistema. Por essa razão que operadores dentro do grupo de simetria são chamados de *operadores de simetria*.

3.5.3 Degenerescência

A degenerescência em um sistema quântico refere-se à condição do sistema de possuir diferentes estados com a mesma energia. Conforme fora visto na digreção da álgebra do momento angular, o operador de Casimir quadrático, $\hat{J}^2$, e seus altovalores foram necessários para averiguar a degenescência existente entre os estados de momento angular. Suponha que uma grandeza associada à $\hat{G}$ é invariante, ou seja, $[\hat{G}, \hat{H}] = 0$ e $|n\rangle$ um autovetor e E_n o autovalor associado. Então, $G\,|n\rangle$ também é um autovetor com a mesma energia pois

$$\hat{H}(\hat{G}\,|n\rangle) = \hat{G}(\hat{H}\,|n\rangle) = E_n\hat{G}\,|n\rangle\,. \tag{3.53}$$

Se $|n\rangle$ e $G\,|n\rangle$ não são os mesmos estados, então ambos têm a mesma energia. Quando o operador de simetria possui um parâmetro contínuo, teremos um contínuo de estados possíveis que compartilham a mesma energia.

Como exemplo, considere um sistema cuja hamiltoniana é invariante sob rotações. Então, denotando uma rotação qualquer por $\hat{R}$, tem-se

$$[\hat{R}, \hat{H}] = 0. \tag{3.54}$$

Isso implica necessariamente que $[\hat{J}^2, \hat{H}] = 0$ e $[\hat{J}_z, \hat{H}] = 0$. Pode-se então construir uma base de autovetores simultâneos para $\hat{H}$, $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$ sendo estes denotados por $|n, j, m\rangle$. Como fora apresentado na seção 3.4, há um degenerescência nos desses estados, pois para um valor de j, há $2j + 1$ valores de m.

3.5.4 Degenerescência do átomo de Hidrogênio e SO(4)

Com este formalismo, pode-se mostrar que a degenerescência total (além daquela relacionada à rotação espacial) do átomo de Hidrogênio advém da simetria particular dos potênciais coulombianos, $1/r$.

Classicamente, as órbitas elípticas fechadas se originam devido a uma constante de movimento [16, p.102], que neste caso é um vetor, particular do potencial coulombiano, conhecido como *vetor de Laplace-Runge-Lenz*, ou simplesmente *Runge-Lenz*,

$$\vec{M} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m} - \frac{Ze^2}{r}\vec{r}. \tag{3.55}$$

Veremos que este vetor possui propriedades que são encontradas em elementos das rotações em 4 dimensões, ou seja, pode ser identificado como um elemento de $SO(4)$.

Primeiro, temos de transformar esse vetor em um operador, ou seja, fazer a quantização do mesmo. Em nível operatorial $\hat{\vec{p}}$ e $\hat{\vec{L}}$ não comutam [6] ,então $\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}$ não é igual a $-\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}$. Mas, por esse motivo, nenhum desses operadores são separadamente hermitianos. Para se ter o operador hermitiano, devemos adotar a definição simetrizada: $\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}$. Com isso podemos escrever o operador vetorial

$$\hat{\vec{M}} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}) - \frac{Ze^2}{|r|}\hat{\vec{r}} \tag{3.57}$$

em que $\hat{\vec{r}}$ é o operador vetorial posição e $|r|$ é a magnetude do vetor posição. Pode ser mostrado [34] que $\hat{\vec{M}}$ comuta com a hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{\hat{\vec{r}}}, \tag{3.58}$$

ou seja, $[\hat{\vec{M}}, \hat{H}] = 0$ e portanto $\hat{\vec{M}}$ é uma constante de movimento. Também, pode ser mostrado que

$$\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{L}} = 0 = \hat{\vec{M}} \cdot \hat{\vec{L}} \tag{3.59}$$

e

$$\hat{\vec{M}}^2 = \frac{2}{m}\hat{H}(\hat{L}^2 + \hbar^2) + Z^2e^4. \tag{3.60}$$

Para identificar a simetria responsável pela constante de movimento, deve-se olhar para as relações de comutação que esse operador obedece. As regras de comutação do momento angular, já foram antes apresentadas e são dadas pela equação (3.18). Também, pode-se mostrar que

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{M}_k. \tag{3.61}$$

e

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{2}{m}\hat{H}\hat{L}_k. \tag{3.62}$$

Esta não é uma álgebra fechada pois existe a presença do operador hamiltoniano na relação de comutação (3.62), dificultando a identificação dos geradores da álgebra. Contudo, restringindo o problema ao caso dos estados ligados, tem-se que o espaço vetorial é truncado nos autoestados do operador $\hat{H}$ com autovalores $E < 0$. Os valores do termo que contém $\hat{H}$ são calculados seguindo a regra de que a ação de uma função de um operador

[6] $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$, e $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ e $[\hat{p}_i, \hat{r}_j] = -i\hbar\delta_{ij}$, então

$$[\hat{L}, \hat{p}]_i = [\epsilon_{ijk}\hat{r}_j\hat{p}_k, \hat{p}_i] = -\epsilon_{ijk}\{[\hat{p}_i, \hat{r}_j]\hat{p}_k + \hat{r}_j[\hat{p}_i, \hat{p}_k]\} = 0 \tag{3.56}$$

herminitiano $\hat{G}$, $f(\hat{G})$, sobre um conjunto de autovetores $\{|\lambda_i\rangle\}$ é definida como sua ação $f(\hat{G})\,|\lambda_i\rangle = f(\lambda_i)\,|\lambda_i\rangle$.

Portanto, os seis operadores $\hat{\vec{M}} = \hat{M}_x + \hat{M}_y + \hat{M}_z$ e $\hat{\vec{L}} = \hat{L}_x + \hat{L}_y + \hat{L}_z$ fechados sob comutação formam uma álgebra maior que a álgebra de $SO(3)$. Para melhor visualizar, faz-se a seguinte redefinição:

$$\hat{\vec{M}}' = (-2H/m)^{-1/2}\hat{\vec{M}}. \tag{3.63}$$

Esse redefinição deixa a equação (3.61) inalterada mas remove o fator $(-2\hat{H}/m)$ da (3.62).

Definindo agora

$$\hat{\vec{J}}^{(1)} = \frac{1}{2}(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{M}}') \tag{3.64}$$

$$\hat{\vec{J}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\hat{\vec{L}} - \hat{\vec{M}}'), \tag{3.65}$$

temos as relações de comutação desacopladas

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_i^{(1)}, \hat{J}_j^{(1)}] &= i\hbar\epsilon ijk\hat{J}_k^{(1)}, \\
[\hat{J}_i^{(2)}, \hat{J}_j^{(2)}] &= i\hbar\epsilon ijk\hat{J}_k^{(2)}, \\
[\hat{J}_i^{(1)}, \hat{J}_j^{(2)}] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Os operadores $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ e $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ separadamente satisfazem a álgebra do grupo $SO(3)$ e comutam entre si. Portanto, as regras de comutação acima podem ser caracterizadas como $SO(3) \times SO(3)$ ou $Su(2) \times Su(2)$ que são isomorfos ao grupo $SO(4)$ [35] que é gerado pelos operadores

$$\hat{J}_{\mu\nu} := \hat{x}_\mu \hat{p}_\nu - \hat{x}_\nu \hat{p}_\mu \tag{3.67}$$

com μ, ν varianres de 0 à 3 e $\hat{m}_\mu$ e $\hat{p}_\mu$ satisfazendo as regras canônicas de comutação ($[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}$).

Das relações (3.66), sabemos que os autovalores de $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ e $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ são, respectivamente, $j_1(j_1+1)$ e $j_2(j_2+1)$, sendo j_1 e j_2 inteiros ou meio inteiros. No entanto, como $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$ e $\hat{\vec{J}}' = \hat{\vec{J}}^{(1)} - \hat{\vec{J}}^{(2)}$, a equação (3.59) junto com a terceira linha de (3.66) impõe que $j_1 = j_2 = j$.

Agora, multiplicando (3.60) por $(-2\hat{H}/m)^{-1}$, tem-se

$$\frac{-1}{2} m e_M^2 \hat{H}^{-1} = (\hat{M}')^2 + \hat{L}^2 + \hbar^2 \mathbb{1} \tag{3.68}$$

Entretanto, $(\hat{M}')^2 + \hat{L}^2 = 2(\hat{L}^{(1)^2} + \hat{J}^{(2)^2}) = 4j(j+1)\hbar^2$ para os estados ligados. Portanto, para esses estados, a energia é dada por

$$-\frac{1}{2} m e_M^2 E^{-1} = [4j(j+1) + 1]\hbar^2 \tag{3.69}$$

$$= (2j+1)^2\hbar^2. \tag{3.70}$$

Definindo $n \equiv (2j+1)$, podemos escrever a energia como

$$E_n = \frac{-me_M^4}{2\hbar^2 n^2}, \tag{3.71}$$

que é precisamente o espectro do átomo de Hidrogênio, com número quântico principal n.

Podemos ver que a degenerescência deste problema surge de duas simetrias "rotacionais" representadas pelos operadores $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ e $\hat{\vec{J}}^{(2)}$. O grau de degenerescência é $(2j+1)^2 = n^2$.

Conclusão

Neste trabalho, foi estabelecida uma base para teoria de grupos e uma ranhura na superfície da teoria de Lie. Aqui, fora explanado o que são os grupos de Lie e porque pertencem a uma classe de grupos relevantes. Junto a isso, foram apresentados alguns grupos de relevância para a teoria e para física. Alguns destes, de tamanha relevância, foram revisitados ao longo de todo o texto.

Dentro das álgebras de Lie associadas a grupos de Lie, estudou-se um pouco as suas representações e classificações. As representações foram apresentadas de maneira sucinta e introdutória pois o foco do trabalho é mostrar como a teoria de grupos, sobretudo os grupos de Lie aparecem na descrição de sistemas físicos.

No capítulo 3 deste monografia foi mostrado os operadores de Casimir que são elementos da álgebra envelopante universal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e, por isso, comutam com qualquer elemento desta álgebra. A relevância dos operadores de Casimir em um sistema hamiltoniano revelam as grandezas associadas a este que são conservadas, que são constantes de movimento. Mais ainda, a hamiltoniana é degenerada em cada multipleto de um grupo de simetria. O grupo ao qual esses operadores pertencem são os grupos de simetrias do sistema. No caso do átomo de hidrogênio, a utilização do operador quadrático foi últil para mostar a degenerescência do átomo de hidrogênio.

Apêndice A

Topologia

Na matemática, espaços são elementos definidos por funções que preservam uma certa estrutura, sendo que, uma função é uma regra que relaciona elementos de dois conjuntos.

Definição A.0.1. *Sejam, A e B dois conjuntos. Uma função $\phi : A \to B$ é uma relação tal que para cada $a \in A$, existe exatamente um $b \in B$ tal que $\phi(a, b)$.*

$$\begin{aligned} \phi :& A \to B \\ & a \mapsto \phi(a) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Sendo que o conjunto A é chamado de domínio da função, B de contradomínio e existe um subconjunto de B chamado imagem $\phi(A) \equiv \mathrm{im}_\phi(A) := \{\phi(a) \mid a \in A\}$, isto é, apenas os elementos de B que a função ϕ mapeia.

Definição A.0.2. *Uma função $\phi : A \to B$ é dita ser:*

- injetora *caso* $\forall\, a_1, a_2 \in A : \phi(a_1) = \phi(a_2) \implies a_1 = a_2$;
- sobrejetora *caso* $\mathrm{im}_\phi(A) = B$;
- bijetora *caso seja injetora e sobrejetora.*

Definição A.0.3. *Dois conjuntos A e B são chamados isomorfos caso exista um mapeamento bijetivo entre eles, denotado por $A \cong_{\mathrm{set}} B$.*

O fato de uma bijeção associar um elemento de A para cada elemento de B implica que os dois conjuntos possuem o mesmo número de elementos, sendo assim, eles tem os mesmo tamanho. Isso é válido para conjuntos finitos e infinitos

Definição A.0.4. *Um conjunto A é:*

- infinito - *Caso exista um subconjunto próprio $B \subset A$ tal que $B \cong_{\mathrm{set}} A$. Caso A seja infinito ainda é possível definir:*
  - ∗ *Infinitamente* contável, *caso $A \cong_{\mathrm{set}} \mathbb{N}$;*
  - ∗ *Infinitamente* incontável, *caso contrário.*
- finito - *caso não seja infinito, tem-se que: $A \cong_{\mathrm{set}} \{1, 2, \ldots, N\}$ para um $N \in \mathbb{N}$, e a* cardinalidade *de A, denotada por $|A|$, é N.*

Dado duas funções $\phi : A \to B$ e $\psi : B \to C$, é possível criar uma terceira $\psi \circ \phi$, que é a composição de ϕ e ψ, isto é,

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi : & A \to C \\ & a \mapsto \psi(\phi(a)). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Definição A.0.5. *Seja $\phi : A \to B$ uma bijeção. Então a* inversa *de ϕ, ϕ^{-1}, é:*

$$\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_A$$

$$\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_B \, .$$

Definição A.0.6. *Seja $\phi : A \to B$ uma função e seja $V \subseteq B$ um conjunto, define-se a* pré-imagem *de V sobre ϕ como:*

$$imagem_{\phi}(V) := \{a \in A \mid \phi(a) \in V\}.$$

Dado um conjunto é possível inferir sobre sua estrutura a partir da identificação de seus elementos, isto é, agrupá-los em classes que representam uma propriedade compartilhada entre eles.

Definição A.0.7. *Seja M um conjunto, uma relação de equivalência ($\sim$) deve satisfazer as seguintes condições:*

i) reflexividade: $\forall\, m \in M : m \sim m$;

ii) simetria: $\forall\, m, n \in M : m \sim n \Leftrightarrow n \sim n$;

iii) transitividade: $\forall\, m, n, p \in M : (m \sim n \wedge n \sim p) \Rightarrow m \sim p$.

Logo $\sim$ é dita uma relação de equivalência em M.

Definição A.0.8. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em M. Então, para qualquer $m \in M$, define-se o conjunto:*

$$[m] := \{n \in M \mid m \sim n\},$$

denominada classe de equivalência de m.

Definição A.0.9. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em M. Então o conjunto quociente de M por $\sim$ é:*

$$M/\sim := \{[m] \mid m \in M\}.$$

O conjunto quociente as vezes também é chamado de partição de M.

Apêndice B

Produto tensorial

Definição: Dado dois espaços vetoriais V e W sobre um corpo $\mathbb{K}$. O produto tensorial,

$$V \otimes W = \{v \otimes w | v \in V, w \in W\}, \tag{B.1}$$

satisfaz:
i) $c(v \otimes w) = (cv) \otimes w = v \otimes (cw)$;
ii)$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$;
iii) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$.

Se $v = \sum_i a_i v_i$ e $w = \sum_j b_j w_j$, pela definição acima,

$$v \otimes w = \sum_i \sum_j a_i b_j v_i \otimes w_j. \tag{B.2}$$

Exemplo: Seja $v \in V = \mathbb{C}^2$ e $w \in W = \mathbb{C}^3$. Escrevendo v e w na forma matricial, temos

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{C} \tag{B.3}$$

O produto tensorial $v \otimes w$ é representado matricialmente como

$$v \otimes w = vw^T = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \beta a & \beta b & \beta c \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

Ainda no contexto de espaços vetoriais, sejam $V_1, ..., V_m$ espaços vetoriais de dimensão n definidos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Um espaço vetorial, denotado por $V_1 \times \cdot \times V_m$, junto com uma aplicação multilinear (f, F), isso é, linear em cada um de seus argumentos,

$$\begin{aligned} f : & E_1 \times \cdots \times E_m \to E \otimes \cdots \otimes E_m \\ & (e_1, ..., e_m) \to f(e_1, ..., e_m) \end{aligned} \tag{B.5}$$

é o produto tensorial entre esses espaços vetoriais se, ao considerarmos outro espaço vetorial U sobre o mesmo corpo e B uma transformação multilinear:

$$\begin{aligned} B :& E_1 \times \cdots \times E_m \to U \\ & (e_1, ..., e_m) \to B(e_1, ..., e_m) \end{aligned} \tag{B.6}$$

então só existe uma, e somente uma, transformação linear

$$L = V \otimes \cdots \otimes V \to U \tag{B.7}$$

tal que $B(v, w) = L(v \otimes w)$, isto é, $B = L \circ f$.

Podemos provar a unicidade. Assim, dizemos que f é universal pois qualquer outra é uma composição dela com uma aplicação linear[1].

Seja $V = \mathbb{K}x = span x$ um espaço vetorial unidimensional. Escrevemos $x^n = x \otimes \cdots \otimes x$ n vezes. Com isso podemos escrever a álgebra tensorial de V como uma álgebra polinomial:

$$T(V) \cong \mathbb{K}[x], \tag{B.8}$$

isto é, polinômios de variável x e coeficientes no corpo $\mathbb{K}$.

Mas isso só é possível para V sendo unidimensional, ou seja, somente sendo x sua variável, pois, supondo $V = span\{x, y\}$, o produto tensorial $V \otimes V$ é da forma

$$\begin{aligned} V \otimes V &= (ax + by) \otimes (cx + dy) \\ &= ac(x \otimes x) + bc(y \otimes x) + ad(x \otimes y) + bd(y \otimes y), \end{aligned} \tag{B.9}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Como $x \otimes y \neq y \otimes x$, não teremos uma álgebra polinomial uma vez que a álgebra dos polinômios é comutativa entre as variáveis. Nesse caso, $T(V) =< x, y >$ [2] é uma álgebra associativa livre (no sentido de não haver relação entre x e y).

Para obtermos uma álgebra polinomial, teremos de obter uma comutatividade entre as variáveis e isto pode ser alcançado a partir do quociente

$$\mathbb{K}[x, y] = \mathbb{K} < x, y > / < x \otimes y - y \otimes x > . \tag{B.10}$$

Este quociente, assim como na teoria de conjuntos e grupos, representa definir qualquer combinação de $x \otimes y - y \otimes x$ como nulo, ou seja, $x \otimes y = y \otimes x$. Desse modo, estamos trazendo a comutatividade entre as variáveis.

Desse modo, conseguimos associar uma álgebra tensorial com uma polinomial, definindo a álgebra simétrica de um espaço V.

[1] Uma demonstração pode ser encontrada em Shlomo Sternberg. *Lie Algebras*, University Press of Florida, 2009.

[2] Aqui, os símbolos <.,.> denotam o espaço gerados pela combinação e composição das variáveis em cada um dos argumentos

Referências Bibliográficas

[1] W. Greiner and B. Müller, *Quantum mechanics: symmetries.* Springer Science & Business Media, 2012.

[2] H. F. Jones, *Groups, representations and physics.* CRC Press, 2020.

[3] E. Noether and M. Tavel, "Invariant variation problems," *Transport Theory and Statistical Physics*, vol. 1, pp. 186–207, 2005.

[4] T. Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics 1869–1926.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer New York, 2000.

[5] T. Inui, Y. Tanabe, and Y. Onodera, *Group theory and its applications in physics*, vol. 78. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] G. Costa and G. Fogli, *Symmetries and group theory in particle physics: An introduction to space-time and internal symmetries*, vol. 823. Springer Science & Business Media, 2012.

[7] F. Cônsole and E. d. S. Bernardes, "Introdução à teoria de grupos e suas aplicações em física," in *Simpósio Internacional de Iniciação Científica da Universidade de São Paulo - SIICUSP*, USP/Pró-Reitoria de Pesquisa, 2014.

[8] E. Artin, *Galois Theory.* Dover Publications, 1998.

[9] K. H. Hofmann and S. A. Morris, *The Structure of Compact Groups.* Berlin, Boston: De Gruyter, 2020.

[10] E. Lima, *Curso de análise.* No. v. 2 in Curso de análise, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1982.

[11] R. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics.* Wiley, 1961.

[12] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

[13] L. Martin, *Algebras de Lie.* Coleção Livro-Texto, Unicamp, 1999.

[14] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* ISSN, Elsevier Science, 1979.

[15] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics Revised Edition.* Analysis, Manifolds and Physics, Elsevier Science, 1982.

[16] H. Goldstein, *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, 1980.

[17] B. C. Hall, “An elementary introduction to groups and representations,” 2000.

[18] F. Iachello, “Lie algebras and applications,” 2006.

[19] A. PAIS, “Dynamical symmetry in particle physics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 38, pp. 215–255, Apr 1966.

[20] L. C. Biedenharn, *Nuclear spectroscopy, Lectures in theoretical physics.* New York, 1963.

[21] L. Biedenharn and H. Van Dam, *Quantum Theory of Angular Momentum: A Collection of Reprints and Original Papers.* Perspectives in Physics: a Series of Reprint Collections, Academic Press, 1965.

[22] G. Racah, “Theory of complex spectra. iv,” *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 1352–1365, Nov 1949.

[23] C. Heinicke, *Diffeomorphism Invariance*, pp. 170–171. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[24] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, pp. 333–366. New York, NY: Springer New York, 2013.

[25] G. Racah, “Group theory and spectroscopy,” 1951.

[26] A. J. Mountain, “Invariant tensors and casimir operators for simple compact lie groups,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 39, no. 10, pp. 5601–5607, 1998.

[27] S. Okubo, “Casimir invariants and vector operators in simple and classical lie algebras,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 18, no. 12, pp. 2382–2394, 1977.

[28] F. Boldt, J. D. Nulton, B. Andresen, P. Salamon, and K. H. Hoffmann, “Casimir companion: An invariant of motion for hamiltonian systems,” *Physical Review A*, vol. 87, no. 2, p. 022116, 2013.

[29] A. M. Perelomov and V. S. Popov, “Casimir operators for semisimple lie groups,” *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 2, no. 6, p. 1313, 1968.

[30] C. Quesne, “Casimir operators of semidirect sum lie algebras,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 21, no. 6, p. L321, 1988.

[31] J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus, “Subgroups of the poincaré group and their invariants,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 17, no. 6, pp. 977–985, 1976.

[32] L. C. Biedenharn, “On the representations of the semisimple lie groups. i. the explicit construction of invariants for the unimodular unitary group in n dimensions,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 3, pp. 436–445, 1963.

[33] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge, New York: Cambridge University Press, 1985.

[34] S. Dietterich, “Laplace–runge–lenz vector operator relations,” 2022. Acessado em 21/12/2023.

[35] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.* Boca Raton, FL: CRC Press, 2nd ed., 1998.